代数的量子論とミクロ・マクロ双対性

小 嶋　泉

1. なぜ「代数的アプローチ」か?:「可能性」対「現実性」

「可能性」対「現実性」という対概念が重要な意味を持つ文脈は？と問われれば，まず人間あるいは人間集団の行動とその目的・目標・意図が絡んだ状況を想定するのが，常識的な発想に違いない：「可能性」を［頭の中で思い描いた・未だ実現していない可能的仮想的現実］,「現実性」を［多くの可能性のうちたまたま実現して，我々の主観・意識・願望だけでは変更することのできない現実のあり方］という形で理解すれば，どうしてもそこに「人間の意識」が絡んでしまう。ところが，量子論の発見とその理論的定式化を通じて我々が学んだのは，人間の意識作用とは無縁なミクロ自然の振舞を整合的に理解しようとすると，そこにもこの「可能性」対「現実性」という構図が深く関わってくるということであった：$\{\varphi_i\}$ を固有状態の完全系として持つ物理量 $A = \sum a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ を「状態」$\psi = \sum_i c_i \varphi_i$ において測定すれば，その都度の測定値が $\{a_i\}$ の中のどれであるかは決まらず，固有値 a_i の実現確率が $|c_i|^2$ に比例することだけが予言可能，という周知の Born の確率解釈が意味するのは，量子系の測定前の事前状態 ψ が持つ情報は測定過程で実現される事象に関する virtual な「可能性のリスト」であり，測定はその複数の可能性の中からその都度特定の一つ《φ_i with $A = a_i$》を「現実性」として確率的に実現する過程だということである (“transitions from potentiality to facts” という問題は，公理的・代数的量子場理論の創始者 Rudolf Haag による量子論の見直し[1] の中でも重要視された)。

こういう眼で 20 世紀に展開された科学の諸分野を振り返ると，物理学に限らず多くの広い領域で，この《抽象的可能性 vs. 具体的現実性》という概念装置が，人間の意識・主観と関わりなくきわめて有効に働くことが分かる。たとえば，動物行動学者 K. Lorenz の発見で有名な「刷り込み」現象[2] は，孵化直後の雛が最初に目にした動く物体を親鳥と認識する生得的仕組みが，その生育に必要な親鳥との行動相関の形成という目的実現に「可能性」を与える一方，それを完成させ「現実化」する最終ステップで，実際に何を親鳥として同定するか？という「解発機構」を「出たとこ勝負」の偶然に委ねた二重構造である。通常それが破綻を来さないのは,「正常な」状況で雛が最初に目にする動く物体はほぼ例外なく親鳥だという事情による。これに対して，多様な抗原に対応した抗体を産生する免疫機構では，もっと積極的に遺伝子断片のランダムな組み合わせから膨大な数の免疫グロブリンの「可能性」を絶えず作り出し，その内部平衡が外からの抗原侵入で破られるのを引き金に，侵入抗原に specific に対応した抗体の産生という「現実性」をもたらす仕組みが知られている[3]。そうした virtual で動的な「可能性」の過程なしに殆ど無限に近い多様性を持つ抗原一つ一つに対応

した抗体産生能は実現不可能に違いない。脳内の神経系の自発活動に基づく“内部情報が 97 %” を占める (!) という話[4] も同様に，virtual と real の間のきわどく微妙な関係を示唆している。ヒトの言語習得過程において赤ん坊に built-in された生得的・内在的な「可能性」要因が，Chomsky の言うように文法の基本構造まで含むか否かは慎重な判断を要するとしても，外国語が話される成育環境下に置かれた子どもが急速に現地語を習得するという周知の経験的事実も，免疫抗体産生機構と同様，virtual な「可能性」＝抽象的な言語習得能力と多様な「現実性」＝特定の言語への適応過程とを分離・結合する戦略のメリットを物語る。

マクロ世界での我々の「常識」で cover し切れないミクロの深い謎を解明しようとする量子物理学の定式化とその理解において，代数的な見方，アプローチが本質的に重要な役割を演ずる理由も，実はこの virtual な「可能性」と多様な「現実性」の分離および両者をつなぐ「実現過程」の働きに基づくものである。単純化に伴う誤りを恐れず割り切った言い方をすれば,《ミクロ＝ virtual な可能性＝抽象的代数構造》,《マクロ＝ reality・現実性＝具体的な表現・「状態」》という「等式」を想定することが様々な場面で役に立つ。

その文脈を掘り下げる前に,「可能性」対「現実性」という構図が，なぜ文頭のような意識関与の状況へ横滑りしてしまうのか？という疑問を片づけておこう。それを「実証的」方法で論証する能力・材料は私にはないが，認識レベルの歴史的進化の順序，およびそれに基づく「客観的」および「主観的」現象領域の分離・対比ということを考慮すれば，答はほぼ推測可能である。つまり，人類の科学的・法則的認識の進化発展が最初は単純な自然現象から始まり，その展開につれ次第に複雑なメカニズムを持った領域の現象が認識対象になる，というごく自然で常識的な事情を考えれば,《virtual で抽象的な可能性》対《多様で具体的な実現形態》というような複雑な二重構造を伴う現象領域が最初からそのターゲットになることは殆ど期待できない。もちろん，人間が生きる「現実世界」の場で，たえず複雑な状況・構造を相手にその都度決断を迫られる事態に直面することは避けられないが，そういう場合の「対処法」は大抵，経験的な「生活の知恵」として集積され，最初からそれが科学的・法則的認識の形態を採るべき必然性・可能性は殆どない。とすれば，規則的な「可能性」と具体的実現形態とが殆どギャップなく直結するような現象領域から法則的認識が生まれ発展したこと，具体的には惑星運動に象徴される古典力学の領域から我々の法則的合理的自然認識が始まったという歴史的事情が自然に了解される。そのような古典物理学的諸領域を今の「後知恵」の眼で見れば，多様な自然のスケールと階層構造の中では極めて例外的な状況であり，その特殊条件抜きにこれら諸領域での法則定立が不可能だったことは明らかだが，実際の認識の歴史の中では，そうした特殊な法則性が以後の科学的認識のお手本とされてしまうのは避け難いことだったに違いない。とすれば，普遍的認識の領域と主観的要因の絡む複雑な領域との間の鋭いコントラストが結果的に,《sharp で clear-cut な古典的因果性》対《「可能性」対「現実性」という二重構造を含んだ複雑な現象》の対比という意味合いを付加的に帯びてしまうのもやむを得ない。こうして,「可能性」・「現実性」という二重構造なしの rigid な自然法則と並んで，この対概念の役割を意識の関与が不可避な現象領域に限定する思考法とが同時進行で確立する。古典物理学の中では長く「抽象的代数構造」とその「表現」という代数的視点が育たず，自然科学の諸領域における「可能性」・「現実性」の二重構造発見とその意義に対する理解が遅れた理由は，多分こんなところにあるのではなかろうか？

漸く 20 世紀に入り多くの科学諸分野の本格的展開を通じて，古典物理学的領域以外の殆ど全ての現象領域（宇宙の構造と進化，地球の構造と進化，生命起源と生物の構造と進化，特に免疫系，脳神経系の構造と機能，等々）で，ミクロ的「可能性」とマクロ的「現実性」との分離とそれを統合する実現過程の果たす普遍的かつ本質的な役割が次々と明らかにされた。恐らく，こういう自然・世界

の基本構造が，“if ... [可能性], then ... [現実性]” という我々の思考パターン，認識の基本的な鋳型を形作るのではないか？人間の意識活動に典型的な「可能性」対「現実性」の構図が他領域へ拡張されたという捉え方は本末転倒で，逆に意識活動の領域におけるこの問題の重要性こそ，その普遍的妥当性の文脈からの「派生命題 (corollary)」と見るのが本筋ではなかろうか？

2. 物理学におけるガロア的視点： ミクロ・マクロ双対性

「可能性」と「現実性」およびその分離・統合が持つ重要な普遍的意味が了解されたとすれば，その視点を具体的な方法論として「使い物になる」形にするにはどうすればよいか？が次に問題になる。そのためには，先に述べた《ミクロ＝ virtual な可能性＝抽象的代数構造》 vs. 《マクロ＝ reality・現実性＝多様な具体的表現・「状態」》という「図式」を，種々の「双対性」概念と結びつけることがカギになる。「双対性」とは，表現される抽象的「ミクロ」とそれを具体的に表現する「マクロ」とをつないで，両者の間の自由な行き来を可能にする数学的機構であり，物理理論の枠内でそれを具体化すれば「ミクロ・マクロ双対性」の方法論的視点になる[5,7]。

ミクロ量子系を可能な限り「純粋な」一般的文脈に置いて見るのが「代数的」量子論のエッセンスだとして，そのお手本を Dirac の “*symbolic* method” に遡れば,「可能性」対「現実性」の構図は《ミクロ＝抽象的代数構造＝ *syntax*》 vs. 《マクロ＝多様な具体的表現・「状態」＝*semantics*》という文脈につながる。今となっては当たり前過ぎてその意味を疑う人とてない「ブラ」$\langle\varphi|$ と「ケット」$|\psi\rangle$ も，元はと言えば Dirac 量子力学の出発点に置かれ，それ自身では「意味不明」の *symbols* に「過ぎなかっ」た。未知の領域に我々が足を踏み入れるとき,「意味・解釈」は後回しに，とりあえず考察対象を表す記号 symbols を導入し，展開された記号間の相互関係 (= syntax of symbols) を通じてその中に現実的意味をくみ取る (= semantics) という「判じ物」めいた議論の展開は避けられない。そういう文脈で我々は「未知の対象」＝「未知数」＝「不定元 X」を相手に，それを既知情報（＝方程式とその「係数」）と付き合わせるべく「方程式」を立て，それを「解く」ことを通じて未知の「可能性」を既知の「現実性」に接続しようと試みるのである。

そこで，とりあえず記号の便宜のため，対象とする物理系の物理量が生成する代数を C*-環 $\mathfrak{F}$ で表せば，多くの場合，系の dynamics や対称性は代数 $\mathfrak{F}$ に対する変換群 G の作用 τ，つまり群の（強連続）準同型 $\tau : G \to Aut(\mathfrak{F})$，を用いて記述される。ただし，$Aut(\mathfrak{F})$ は $\mathfrak{F}$ の代数構造を保つ変換からなる自己同型群。この設定の「意味」を考える前に，先に「双対性」の説明を済ませよう。群 G が局所コンパクト可換群ならその上の指標＝連続準同型 $\chi : G \to \mathbb{T}$ の全体は局所コンパクト可換群 $\hat{G}$ を作り，G と $\hat{G}$ を入れ替える「対称性」として周知の Fourier-Pontryagin 双対性が成り立つ。G：非可換の場合，G の既約 unitary 表現の同値類全体として定義された群双対 $\hat{G}$ は可換群の時と違って群にならないが，G：コンパクトなら淡中-Krein 双対性, 局所コンパクトなら辰馬双対性により，$\hat{\hat{G}} \simeq G$ が成り立つことが知られている[7,8]。有限群 G では「形式和」 $f = \sum_{g\in G} f(g)g$ と関数 $G \ni g \longmapsto f(g) \in \mathbb{C}$ との対応で，群構造に線型演算を付加した「代数化」が作れ，群の積は畳み込みになる。この見方を局所コンパクト群 G の（左）Haar 測度 dg に関する可積分関数に適用すると，畳み込み積 $(f_1 * f_2)(g) := \int_G f_1(s)f_2(s^{-1}g)ds$ と共役演算 $f^*(g) := \overline{f(g^{-1})}\Delta_G(g)^{-1}$ （ただし $d(g^{-1}) = \Delta_G(g)^{-1}dg$）を持つ Banach*-環 $L^1(G, dg)$ ができる。然るべき位相でそれを完備化すれば群 C*-環 $C^*(G)$ や群 von Neumann 環 $W_r^*(G) = \lambda(G)''$ が定義され，G の代数化として群と代数，それらの表現にまつわる話を自在に制御できるようになる。ただし，λ は $L^2(G, dg)$ 上の正則表現 $(\lambda_g\xi)(s) := \xi(g^{-1}s)$ $(\xi \in L^2(G, dg))$。Fourier 変換 $[\mathcal{F}(f)](\gamma) :=$

$\int_G f(g)\gamma(g)dg$ は Banach*-環から G-表現 γ の圏 $RepG$ 上の演算子場への準同型写像 $[\mathcal{F}(f_1 * f_2)](\gamma) = [\mathcal{F}(f_1)](\gamma)[\mathcal{F}(f_2)](\gamma), [\mathcal{F}(f^*)](\gamma) = [\mathcal{F}(f)](\gamma)^*$ を与え，それを正則表現 λ に制限した環準同型写像 $\lambda(f) := [\mathcal{F}(f)](\lambda)$ が群双対性で中心的な役割を演ずる。

これと同様のことを G が代数 $\mathfrak{F}$ に変換群として作用する状況で考えると，群 G 上の関数 $f \in L^1(G, dg)$ の代りに G 上の $\mathfrak{F}$-値可積分関数 $F \in L^1(G, \mathfrak{F})$ とそれらの畳み込み積 $(F_1 * F_2)(g) := \int_G F_1(s)\tau_s(F_2(s^{-1}g))ds$ から決まる Banach*-環 を出発点として，G と $\mathfrak{F}$ の両方を含んだ代数構造としての「接合積」 $\mathfrak{F} \rtimes_\tau G$ が構成される。実際，その定義で $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$ と置くと群環 $C^*(G)$ または $W_r^*(G)$ が再現する一方，代数 $\mathfrak{F} \rtimes_\tau G$ の表現を与えることは，「共変性条件」：$\pi(\tau_g(F)) = U(g)\pi(F)U(g)^{-1}$ を満たすような $\mathfrak{F}$ と G の表現の組 (π, U)，言い換えると（非可換）力学系 $G \underset{\tau}{\curvearrowright} \mathfrak{F}$ の「共変表現」 を指定することと等価である。G が非可換群なら群双対 $\hat{G}$ は群にならないが，うまく Fourier 変換をかませると「$\hat{G}$ の作用」に相当する G の “co-action” が定義され，それを G の作用下での**固定部分環** $\mathfrak{F}^G := \{F \in \mathfrak{F}; \tau_g(F) = F \text{ for } \forall g \in G\}$ に作用させて作った接合積が（適当な条件下に）$\mathfrak{F}^G$ から元の $\mathfrak{F}$ を再現することが知られている：$\mathfrak{F}^G \rtimes_{\hat{\tau}} \hat{G} \simeq \mathfrak{F}$。この文脈で Fourier duality $\hat{\hat{G}} \simeq G$ に相当するのは，接合積に対する竹崎-高井-中神の双対定理： $(\mathfrak{F} \rtimes_\tau G) \rtimes_{\hat{\tau}} \hat{G} \simeq \mathfrak{F} \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$ または $\mathfrak{F} \otimes B(L^2(G))$ （：前者は C*-接合積，後者は von Neumann-version での接合積）である[9,10]。適切な条件 (= Galois closedness) を設定してこういう仕掛けを用いれば，固定部分環 $\mathfrak{F}^G =: \mathfrak{A}$ と双対的に **Galois 群** $Gal(\mathfrak{F}/\mathfrak{A}) := \{s \in Aut(\mathfrak{F}); s(A) = A \text{ for } \forall A \in \mathfrak{A}\}$ や $\mathfrak{A}$ の $\hat{G}$ による **Galois 拡大** $\mathfrak{A} \rtimes_{\hat{\tau}} \hat{G}$ が定義され，それらを用いて，量子系のミクロレベルにおける不可視の動的振舞やマクロレベルでの可視的相貌とそれらの相互関係を，整合的に議論することが可能になる。実際，Doplicher-Haag-Roberts による「セクター理論」[11,12] は，観測可能な物理量としての observable algebra $\mathfrak{F}^G = \mathfrak{A}$ と物理的に実現可能な $\mathfrak{A}$ の表現の集まり（：**結果的に**群双対 $\hat{G}$ で parametrize される）に関する情報だけから出発して，field algebra $\mathfrak{F}$ や大域的ゲージ群 G に関する事前の知識を一切仮定せず，Fourier-Galois duality: $G \underset{\tau}{\curvearrowright} [\mathfrak{F} = \mathfrak{A} \rtimes_{\hat{\tau}} \hat{G}] \rightleftarrows [\mathfrak{A} = \mathfrak{F}^G] \underset{\hat{\tau}}{\curvearrowleft} \hat{G}$ に基づく数学的構成法だけでそれらを決定できること：$\mathfrak{F} = \mathfrak{A} \rtimes_{\hat{\tau}} \hat{G}, G = Gal(\mathfrak{F}/\mathfrak{A})$ を示した。これは，帰納法の数学化を可能にする一般的理論的方法論[13] の先駆けと解釈できる。

ミクロ量子系の代数的定式化をこういう眼で振り返ると，ミクロレベルの抽象代数 $\mathfrak{F}$ に属する「物理量」$X (= X^*) \in \mathfrak{F}$ は，直接見ることも触ることもできない virtual な「可能的」存在で，それをおなじみの Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の線型演算子として扱うには $\mathfrak{F}$ の「表現」 $\pi : \mathfrak{F} \to B(\mathfrak{H})$ を決める必要がある。$\mathfrak{H}$ 上で $\pi(X)$ をスペクトル分解し，初期状態を選んで測定過程をくぐらせれば，漸く Born 解釈を通じて数値化され「現実化」した測定値とその確率分布が定まる。言い換えると，**測定以前の物理量** X はそれ自身では「数値化」不能な**不定元**であり，X の**測定過程**は初期状態（を指定するマクロ parameter）を既知係数として**未知数** X を決める**方程式**として機能し，スペクトル分解によってそれを**解いて得られる「解」**がすなわち，具体的数値の形を取った個々の**測定値**にほかならない。ここで，表現 π や初期状態の選択とスペクトル分解は，分離された可能性と現実性を結びつける実現過程として機能し，「測定とは無関係に物理量 X が定まった値を持つはずだ」との常識的古典物理学的な思い込みが正当化されるのは，π や初期状態の選択の余地なしに X がただ１点のスペクトルを持つような特殊状況だけ，ということがここで明らかになる。

3. 測定過程から増幅＝実現過程へ

紙数も残り少ないので，測定過程がどう定式化さ

れるかをごくかいつまんで説明しよう。前節の「セクター理論」で扱う「セクター」とは observable algebra $\mathfrak{A}$ の表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ で対応する von Neumann 環 $\mathcal{M} := \pi(\mathfrak{A})''$ が factor, すなわち中心自明なもの: $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}'' = \mathbb{C}\mathbf{1}$ を指す。与えられた $\mathfrak{A}$ の表現に含まれるセクターとその相互関係 (inter-sectorial structure) はその表現の「中心」に属する古典的マクロ変数である「秩序変数」で記述され,「中心」は可換環だから秩序変数の測定は古典物理学の場合と同じ。問題は「セクター」内部の量子論的構造 (intra-sectorial structure) の検出で，そこで同時測定可能な物理量の極大集合である極大可換部分環 $\mathcal{A} = \mathcal{M} \cap \mathcal{A}'$ を測定する物理的仕組みを考えよう[5]。可分な Hilbert 空間で記述される物理的状況では $\mathcal{A}$ は局所コンパクトユニタリー可換群 $\mathcal{U}$ から生成され： $\mathcal{U} \subset \mathcal{A} = \mathcal{U}''$, 対象系 $\mathcal{M}$ の部分系 $\mathcal{A}$ とその測定値を記述する測定系とを同一視すれば，対象系と測定系の間の相互作用で決まる合成系が接合積 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha \mathcal{U}$ で記述される。その構成は $(W\xi)(u,v) := \xi(vu,v)$ $(\xi \in L^2(\mathcal{U}\times\mathcal{U}), u, v \in \mathcal{U})$ で与えられる Kac-竹崎 (K-T) 演算子[7,8] W と埋め込み写像 $E: \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{M}$ で指定され，測定過程は Fourier 変換 $E_*(V) = (id\otimes\mathcal{F})(E\otimes id)(W)(id\otimes\mathcal{F})^{-1} = \int_{\widehat{\mathcal{U}}} dE(\gamma)\otimes\lambda_\gamma$ から決まる "instrument":

$$\mathfrak{I}(\Delta|\omega_\xi)(B) := (\omega_\xi \otimes m_{\mathcal{U}})(E_*(V)^*(B\otimes\chi_\Delta)E_*(V))$$

によって全て記述可能[5]。ただし，$\omega_\xi : \mathcal{M} \ni B \longmapsto \omega_\xi(B) = \langle\xi|B\xi\rangle$ は $\mathcal{M}$ の初期状態，$m_{\mathcal{U}}(f) = \langle\iota|f|\iota\rangle$ は測定器の中立位置の状態であり，$\mathcal{A}$ の**測定値** $\gamma \in Spec(\mathcal{A})$ が Borel 集合 Δ に入る確率は $p(\Delta|\omega_\xi) = \mathfrak{I}(\Delta|\omega_\xi)(\mathbf{1})$, それに伴って実現される $\mathcal{M}$ の**事後状態**は $\mathfrak{I}(\Delta|\omega_\xi)/p(\Delta|\omega_\xi)$ で与えられる[15]。

このような対象系と測定系との coupling で実現されるのは両者のミクロ接点における「量子論的状態変化」であり,「測定」本来の目的の達成には，この微小変化を測定器の示針移動という巨視的古典的変化に増幅拡大する必要がある。これはミクロレベルでの「可能性」としての「解」を目に見える形に変換する「実現過程」であり，測定過程に限らずミクロ量子系とマクロ世界との物理的関係に関わる多くの文脈で重要な問題である。寡聞にして私はその一般的定式化を知らないが，今の文脈での「答」は単純で，$\widehat{\mathcal{U}}$ の正則表現の任意テンソル冪 $\lambda^{\otimes n} = \lambda\otimes\cdots\otimes\lambda$ が互いに「準同値」(i.e., 多重度を除いてユニタリ同値) $\lambda^{\otimes m} \approx \lambda^{\otimes n}$ $(\forall m, n \in \mathbb{N})$, という事実を使うと，K-T 演算子 $V = (\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})W(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})^{-1}$ の無限反復作用により次のように書ける[16]： 対象系が初期状態 $\xi = \sum_{\gamma\in\widehat{\mathcal{U}}} c_\gamma \xi_\gamma$ の時，合成系の状態変化は

$$\begin{aligned}
&V_{n,n+1}\cdots V_{23}E_*(V)_{12}(\xi\otimes\underbrace{|\iota\rangle\otimes|\iota\rangle\cdots\otimes|\iota\rangle}_{n}) \\
&= \sum_{\gamma\in\widehat{\mathcal{U}}} c_\gamma V_{n,n+1}\cdots V_{34}V_{23}(\xi_\gamma\otimes|\gamma\rangle\otimes|\iota\rangle\cdots\otimes|\iota\rangle) \\
&= \cdots = \sum_{\gamma\in\widehat{\mathcal{U}}} c_\gamma\xi_\gamma\otimes\underbrace{|\gamma\rangle\otimes|\gamma\rangle\cdots\otimes|\gamma\rangle}_{n} \\
&\underset{n\to\infty}{\to} \sum_{\gamma\in\widehat{\mathcal{U}}} c_\gamma\xi_\gamma\otimes\left[|\gamma\rangle^{\otimes\infty}\right],
\end{aligned}$$

Heisenberg 描像では,

$$\begin{aligned}
&A\otimes f_2\otimes\cdots\otimes f_{n+1} \\
&\longmapsto Ad(E_*(V)_{12}^*)Ad(V_{23}^*)\cdots Ad(V_{n,n+1}^*)(A\otimes \\
&\qquad f_2\otimes\cdots\otimes f_{n+1}) \\
&= Ad(E_*(V)^*)(A\otimes Ad(V^*)(f_2\otimes Ad(V^*)(\cdots \\
&\qquad \cdots\otimes Ad(V^*)(f_n\otimes f_{n+1})))\cdots)
\end{aligned}$$

という形で，摂動論の time-ordered Dyson 行列や Accardi の量子 Markov 鎖[17] と類似の形で量子確率過程としての記述ができる。「量子古典対応」の基本的見方に従えば，Ising あるいは Heisenberg 強磁性体の巨視的磁化が無限個の spin の方向が揃った状態 $|+\rangle^{\otimes\infty}$ で記述されるのと同様，状態 $|\gamma\rangle^{\otimes\infty}$ は無限個の量子の凝縮状態として巨視的古典的対象の状態を表すから，これは中立位置 ι からの測定器の目盛の巨視的古典的な動き $\iota\to\gamma$ の数学的・抽象的な記述と解釈できる。つまり，正則表現の任意テンソル冪 $\lambda^{\otimes n} = \lambda\otimes\cdots\otimes\lambda$ の間の準同値関係は，測定過程の記述で重要な反復再現

性を数学的に保証すると同時に,「測定値」確定のためのマクロ化過程をも自動的に与えるものと結論できる。勿論, $n \to \infty$ は十分大きい N に対する「数学的近似」に過ぎず，状況次第ではその有限性を思い出して，量子干渉性を回復すべき場面があり得るから，そういう状況をも含めた整合的扱いには超準解析的手法が必要になる。もう一点面白いのは，関係式 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ から写像 f のアフィン性 $f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$ $(\forall \lambda, \mu > 0)$ が導かれるのと類似の議論により，この準同値関係 $\lambda \approx \lambda^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ から $\lambda \approx \lambda^{n/m}$ $(\forall m, n \in \mathbb{N})$ が導出され，上の変換とそれに付随する確率過程の "無限分解可能性" $(AdV^*)^{t+s} \approx (AdV^*)^t (AdV^*)^s$ $(t, s > 0)$（つまり，Lévy 過程性）が導かれる。とすれば，１回１回の単純測定とそこでの「測定値」確定の問題は，測定の離散的反復ともまた連続測定とも，ほぼ「地続き」につながっていると見てよいだろう[18]。

動的なミクロ量子系から（数学的意味での）"universality" を持つマクロ古典レベルを生成する「実現過程」で「マクロ化機構」として働くこの増幅過程の深い本質が系統的に明らかになれば，逆にそれに基づいて,「現実性」＝マクロレベルの知識からそれを産み出した「可能性」＝ミクロ系を帰納する仕組み[5, 16] も，Galois 拡大と coaction を通じてより明快になるに違いない。

"Last but not least"：本稿を克明に読み双対性の階層構造に及ぶ貴重なコメントを下さった谷村省吾さん（京都大学）に深く感謝します。

参考文献

1) Haag, R., An evolutionary picture for quantum physics, Comm. Math. Phys. **180**, 733-743 (1996).
2) ローレンツ, K., ソロモンの指環　動物行動学入門, 改訂版, 日高敏隆訳, 早川書房, 1987.
3) 多田富雄，免疫の意味論，青土社，1993.
4) 池谷裕二，進化しすぎた脳，講談社, 2007.
5) Ojima, I., Micro-macro duality in quantum physics, pp.143–161 in Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum, World Scientific, 2005; Ojima, I. & Takeori, M, How to observe quantum fields and recover them from observational data? – Takesaki duality as a Micro-Macro duality –, to appear in Open Systems and Information Dynamics, **14** (2004), math-ph/0604054 (2006); 小嶋泉「量子場の観測過程」数理科学 2005 年 10 月号, pp.18-25.
6) 小嶋 泉，谷村省吾，双対性をめぐる物理学対話，数理科学別冊号「双対性の世界」 2007 年 4 月刊行予定.
7) N. Tatsuuma, A duality theory for locally compact groups, J. Math. Kyoto Univ. **6**, 187-217 (1967); 辰馬伸彦，位相群の双対定理, 紀伊國屋書店, 1994.
8) Enock, M. & Schwartz, J.-M., *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups*, Springer, 1992.
9) Takesaki, M.: Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta Math. **131**, 249-310 (1973); *Theory of Operator Algebras II*, Springer-Verlag, 2003.
10) Nakagami, Y. & Takesaki, M., *Duality for Crossed Products of von Neumann Algebras*, Lec. Notes in Math. **731**, Springer, 1979.
11) Doplicher, S., Haag, R. & Roberts, J.E., Fields, observables and gauge transformations I & II, Comm. Math. Phys. **13**, 1-23 (1969); **15,** 173-200 (1969); Local observables and particle statistics I & II, **23**, 199-230 (1971); **35**, 49-85 (1974).
12) Doplicher, S. & Roberts, J.E., Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, Comm. Math. Phys. **131**, 51-107 (1990).
13) Ojima, I., A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria –Order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings of adjunctions–, Open Systems and Information Dynamics, **10**, 235-279 (2003); Temperature as order parameter of broken scale invariance, Publ. RIMS **40**, 731-756 (2004); 小嶋 泉「だれが量子場を見たか」，講演集『だれが量子場をみたか』, 日本評論社，2004, pp.65-107; 「場の理論と演算子：量子場とは？」数理科学 2004 年 4 月号, pp.19-25.
14) Takesaki, M., A characterization of group algebras as a converse of Tannaka-Stinespring-Tatsuuma duality theorem, Amer. J. Math. **91**, 529-564 (1969).
15) Ozawa, M., Quantum measuring processes of continuous observables. J. Math. Phys. **25**, 79-87 (1984); Publ. RIMS, Kyoto Univ. **21**, 279-295 (1985); Ann. Phys. (N.Y.) **259**, 121-137 (1997).
16) 小嶋　泉，ミクロ・マクロ双対性 ーミクロ量子系をマクロ観測データから再構成する数学的方法ー，京都大学数理解析研究所講究録 1532 情報物理学の数学的構造，pp. 105 – 117; Ojima, I., Lévy process and innovation theory in the context of Micro-Macro duality, in The 5th Nagoya Lévy Seminar (2006), edited by T. Hida.
17) Accardi, L., Noncommutative Markov chains, in Intern. School of Math. Phys., Camerino, pp. 268-295 (1974); Topics in quantum probability, Phys. Rep., **77**, 169-192 (1981).

18) 小嶋 泉・田中 正，状態の準備・波束の収縮と反復測定（第 III 部第 2 章 pp.235 – 243,『量子情報と進化の力学』，牧野書店, 1996）

（おじま・いずみ，京都大学数理解析研究所）