量子古典対応と
ミクロ・マクロ双対性

京大数研　　小嶋　泉

2008.3.7: 九大ワークショップ「自然現象における階層構造と数理的アプローチ」での講演メモ

1　はじめに

1.1　概要

ミクロとマクロ，量子と古典の相互関係を**統一的かつ柔軟に**理解するには，どのような**方法論**と物理理論のどんな**組替え**が必要か？

重要なヒントのひとつが，**「量子古典対応」という物理的直観**

それを数学的な形で具体化するのは**「ミクロ・マクロ双対性」という方法論**

そのカギになるのは**「セクター」**または**「純粋相」**という概念

それに基づいて**「量子古典境界」をあいまいさなく定義**することが可能

1.2 「研究会の趣旨」とのつながりで

「... 古典力学と量子力学、連続体力学と質点系の力学など、**異なる法則・描像に従う複数の階層から成る系を首尾一貫した方法で**扱うことができるのか
：→ (categorical) quadrality scheme (: *a possible answer* from my approach [QFT, IO03a, IO03] の意味で。以下同様)

首尾一貫した方法で扱える事を保証する一般的原理は何か
：→ duality (or adjunction) as matching condition [IO03, IO04]

異なる階層間の境界をどう設定するのか
：→ sectors = 量子古典境界（situation, scale dependent な）[Amp]

その**境界が動的に変動する場合**にどう対処するのか
：→ dynamical & stochastic approach to spacetime emergence [Amp]

異なる階層の間を行き来する自由度をどう扱うのか
：→ “theory bundle” controlled by 「自然定数変化法」 [IIAS03, Amp]

等方法論の根幹に関わる問題点は数多い。また得られた結果に対する**データ解析の際**にも、ゆっくりした時間スケールで変動する**集団的な自由度をどう抽出するのか**、そのような**集団的自由度の運動を記述する現象論**をどう構築するのか
：→ “sector bundle” associated with SSB [IO03]

複数の時間・空間スケールに渡る相関や因果関係をどう検証するのか
：→ (categorical) quadrality scheme [QFT, IO03, IO04]
等、複雑かつ階層的な自然現象を理解する場合に、我々が普遍的に向き合うであろう様々な問題がある。

特に今回は、

・**量子古典対応**を数理的な観点から厳密に考え直す

・**非定常な現象に関してエルゴード性**の概念を拡張する

・乱流の複雑なダイナミクスに見られる階層性とその数理的扱い

・**階層的な構造を持つデータ**に対する解析手法の開拓

・**多様な現象を記述**する連成シミュレーションと解析手法の現状

等の問題に焦点を当て、数理的視点と計算科学的視点の両面から、総合的に討論する ･･･」

1.3 ミクロ・マクロ相互関係= 量子古典対応に関する基本的イメージ

マクロ世界		大気圏
ミクロマクロ境界 = 相 = セクター	$\longleftrightarrow$	地殻 = 内部外部境界
創発 + feedback $\uparrow\downarrow$ 制御 + dilation		$\uparrow\downarrow$
ミクロ	$\longleftrightarrow$	マグマ (地殻下)

１）物理学諸理論の基本構造
= 基本四枠 (**quadrality** = **pair of duality pairs**)
+ **selection criteria** (= eqns to determine relevant states)

２） “基本理念” = [量子古典対応とミクロ・マクロ双対性] とその数学的定式化 [QFT, IO03]：
Duality (より一般には adjunction) between
what to be described [: 対象系]
& what to describe [: 記述系]

(: これは記述・分類・解釈の一般的本質！)

３）セクター = 相 = 量子古典境界 [IO03, Amp]：
セクター = 相互に除去不能な非対角項を持つ状態族の「内部 (= 相内)」 と「外部 (= 相間)」

４） Fourier duality → 力学系と接合積
+ ガロア的視点 → [方程式 as selection criterion] と [解] の間の双対性

５） 展望

2　自然記述の理論枠を見直す

（物理的自然）現象の**記述・分類・解釈・伝達**を円滑に進めるため，理論枠を整備する上で言語表現の考察は不可欠。それを詮じ詰めると問題は**言語** → **論理**に行き着く。それが [5W1H] からbasic quadrality への議論の筋道：

2.1　“5W1H” と 物理学諸分野の理論構造

5W1H= 「いつ・どこで」・「誰が」・「何を」・「なぜ・どうした」:

1. [いつ・どこで]= **Spacetime** localization (= “座標付け” = **Spec**) [幾何レベル]: visible Macro

2. [何を・どうした]⟶「**作用対象**の**状態とその変化**」 = [表現論・解析レベル]: visible Macro

3. [誰が]⟶「**運動•作用の主体**」= **Algebra of physical variables** (to characterize the observed system) [代数レベル]: Micro

4. [どのように・なぜ]⟶
   Dynamics=「起動因」(→ **Dyn** as **syntax**)
   & 意味論・解釈 (→ **Spec** for **semantics**) [動力学過程]

ここでの基本的構図(以下"**(basic) quadrality**"と呼ぶ):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \textbf{Spec} & & \\
 & & & & \uparrow\downarrow & & \\
\text{対象系} & & & \text{演繹} \nearrow & & & \text{記述系} \\
\text{ミクロ} & : & \textbf{Alg}\text{ebra} & & \textbf{States/Reps} & : & \text{マクロ} \\
 & & \uparrow\downarrow & \swarrow \text{帰納} & & & \\
 & & \textbf{Dyn}\text{amics} & & & &
\end{array}$$

は**種々の物理理論で検証**可能 [QFT, IO03]

→ 物理理論の**方程式論(=Galois) 的** (: 微分形) & **automaton 的** (: 積分形) 側面が明らかに

Remark 1 *"Quadrality"* の本質は複数の *duality pairs* の *dual* な関係にあり，意味のある動的記述には最小限 *"4*項*"* 必要というだけ。数字 *"4"* に特に *numerological* な深い意味があるわけではない，念のため。

物理学諸分野の理論的骨格に内在する "quadrality structures" [QFT]:

1. 古典論的 [**粒子 vs. 力の場**]
   = Newton 力学： "粒子的" 対象 vs. "背景" 時空

   第 1 法則：状態記述の基本語彙・記述変数としての「基準状態」= 等速直線運動
   with $(x, p$=const$) \in T^*M$ (M: 背景時空)
   $\rightarrow$ Alg+ Rep/State+ Spec(=時空): kinematics

   第 2 法則：「現実」の基準状態からのズレ
   =**状態変化の法則**: $[dp/dt = F =$ 外力]:
   [Rep/State vs. Dyn]: dynamics

   第 3 法則：状態変化の原因= 「外力」= 「相互作用」= Dyn: 合成系

2. 力の場と古典場の力学：

(a) 連続体& 流体の力学: Lagrange(粒子) vs. Euler(平均場), 散逸性・粘性 vs. 保存則

(b) **電磁気**学・**特殊相対論** $(e, 1/c)$： 場と時空
$\rightarrow$ 基本変数(Alg+ states)+Maxwell eqn. (Dyn):
$F_{\mu\nu}$ vs. $J_\mu \rightleftarrows T_{\mu\nu} \rightleftarrows$ 基準系 (Spec) $=$ Minkowski 時空 $\curvearrowleft$ **Lorentz 群**

3. **ミクロ vs. マクロ**：

(a) 熱力学： [visible マクロ=仕事] vs. [invisible ミクロ=熱]

第０法則：状態記述の基本語彙としての「基準状態」= 温度平衡状態= ［「熱平衡接触関係」=**同値関係**の同値類］: kinematics

第１法則:熱的散逸過程の**力学系への埋込み**= **dilation** of **heat** into a dyn.sys. with **conserved energy**: kinematics+ dynamics+ 合成系

第 2 法則 :「現実」の基準状態からのズレ
= 状態変化の法則= 「エントロピー生成」: dynamics

第 3 法則:基準状態とエントロピーの基点: kinematics

(b) 統計力学 (k_B) +物性論
← 基本変数 (Alg+ states)+ **state-changing** processes driven by **external** fields
$\Longrightarrow$ 刺激 $\rightleftarrows$ 応答

(c) 量子論的 [粒子 vs. 場] (= 構造とゆらぎ) :
量子力学($\hbar$) + 量子場理論+ 素粒子論 (強い力／弱い力)
← Alg of observables+ family of standard states (真空, 散乱状態, 熱的状態, ...)
+ dynamics of state changing processes
+ "internal" structure[=「質」的属性の基礎]

(d) 時空= Spec
= 構造**分類**のための幾何学的空間とその物理:
重力+ 一般相対論+ 宇宙論 (m, κ, Λ)

2.2 演繹$\rightleftarrows$帰納とDuhem-Quine パラドックス

物理学は[実験(simulation を含む)と理論を両輪として自然を探求する科学]
$\Longrightarrow$ ミクロ自然を記述する**理論の出発点**は「仮説」。
仮説の「正しさ」の根拠は？$\Longrightarrow$それから導かれた理論的予測と実験事実との「一致」**のみ** (i.e., 導かれた諸帰結の本質的部分が全て実験データと無矛盾)。
いかに精緻で「高級」な理論もこの「一致」なしには単なる *ad hoc* な仮定に過ぎない (Cf. "Theory of Everything")：

$$\begin{array}{c} \text{演繹に基づく理論的予測} \\ \updownarrow \longleftarrow \text{実験観測過程} \\ \text{実験データ } \mathcal{EX} \end{array}$$

しかるに，**現実の実験は**
有限個の物理量の有限精度での測定結果しか与えない
から，実験データとミクロ理論の完全な１：１対応は不可能！

実験データと理論的予測の「一致」は，
採用された理論的仮定 $\mathcal{TH}$ が**実験結果を説明する複**

数の可能性・十分条件・理論の候補 $\mathcal{TH}, \mathcal{TH}_1, \cdots,$ **の一つであることを保証するだけ**。
「一番もっともらしい候補」以上に「唯一可能な理論としての最終的正当化」は**論理的に不可能**!:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{TH} & \searrow & \\ \mathcal{TH}_1 & \longrightarrow & \mathcal{EX} + \text{誤差} \\ \vdots & \nearrow & \end{array}$$

"*Apriorism* starting from *ad hoc* postulates"（根拠なき前提からの「先験的」展開）!? $\Longrightarrow$ これは,《マクロはミクロの粗視化による不正確な近似像，正しいのはミクロ理論とそこからの演繹のみ》という「（物理学の）常識」から帰結する自己撞着！[QFT]。

あり得る反論："こんな論法は「屁理屈」＝「抽象論理の形式的運用」だ! たとえ有限個の有限精度のデータでも「現実的には殆ど一意的」に「標準理論」が正当化され，それで十分"
$\Longrightarrow$ この論法では,「**現実的に殆ど**」なるマクロ的「近似性」を（**実験条件設定の際，ミクロ初期状態をマクロ的に制御**する必要から）ミクロにまで持ち込み，結局《ミクロだけが正しい》という主張の破綻を自ら認める羽目に陥る。

ではどうするか？ミクロ $\rightarrow$ マクロの「演繹一本槍」でだめなら，逆方向の[マクロ $\rightarrow$ ミクロ]＝「帰納」と couple させればよい！

2.3 演繹 $\rightleftarrows$ 帰納，ミクロ$\rightleftarrows$マクロの双方向的展開に基づくマクロと帰納=再構成の「復権」

帰納= [既知データから出発して未知対象に向かう推論]= [**方程式の解法**] とすれば，帰納法の出発点に採る「既知のマクロ」とはそもそもどういう素性のものか？が要検討のはず！
「未知の正解」= ミクロに目を奪われマクロを「既知で当たり前の近似像」として軽視し，ミクロとマクロを切離す常識的見方では，これは視角外の設問 [Basic]。

ミクロとの比較を通じてマクロを再検討すれば，
　　ミクロにあってマクロにない性質（e.g., 量子性）と共に，
　　温度概念や凝縮状態，相転移のように，
　　マクロレベルにあってミクロにない概念・本質があり，両者の相互関係の扱いこそが非自明で重要！
$\Longrightarrow$「既知の見慣れた」マクロの出自を，ミクロからの「創発 (emergence)」として問い直す課題へ [QFT]。

ミクロとの相互関連の中での吟味を通じて明示化されるマクロの新しい本質，特にその「条件的・歴史的」性格は，こういう視角から初めて光の当たる問題。今までその重要な含意が十分考慮されてきたとは言い難い。

多分，[同一時空点での量子場の積「$\hat{\varphi}_1(x)\hat{\varphi}_2(x)$」$\Longrightarrow$ 紫外発散] に現われる「古典的時空点 x」も，こういう性格の問題の典型例のはず。

結論を先取りすると，

ミクロ理論もマクロ理論・マクロの現象データも
どちらも「近似」
両者の相互関係・「双方向的」つながりの中にこそ，
特定の限られた文脈での「真実」がある，

というのが **duality** の捉え方。

そう見れば，誤差の不可避的存在を最初から認め，記述さるべき対象とその側面・精度を明示的に指定して，「現実的に殆ど」という言葉に含まれる**「適用限界」の問題を本質的構成要素として積極的に**理論の枠組に取り込む道が開ける。

予想される反論は,《抽象論・一般論なら,「ミクロ $\rightleftarrows$ マクロの双方向性」や「理論の適用限界」という「お話」も大変けっこう。しかしそんな「お題目」を実際的生産的な形で現実の科学研究に取込むことなど一体可能か？》:
具体的にどんな形で上の要求を満たす理論枠が可能か?
それによってどんなメリットが生まれ，どんな可能性が開かれるか？等々,
を明示せず，これまでの考え方を改めよとだけ急に言われても，それは確かに無理な相談。
実際，マクロサイドからミクロの理論的出発点への帰納的推論に関わる問題は常に「(天才の！）直観」に委ねられ，その発見にまつわる科学史的「エピソード紹介」以上に踏込んだ議論がなされてこなかった理由は，要するにそれがこれまで標準仕様の「厳密な」数学的理論的定式化に馴染まなかったから。
E.g., Stefan-Boltzmann の法則 $u = \sigma T^4$ を生の実験データから読み取るのは至難の技というエピソード。

「どういう素性のマクロから出発する帰納か？」という問題を，実験データの処理・解釈や「天才の閃き」まで含め「一挙に全て」検討対象にすれば，収拾のつかない泥沼にはまり込むのは自明。

その一方，危険を恐れ「臭いものにフタ」でマクロの再検討を一切回避したのでは,「マクロは全て既知」との我々の思い込みを検討し直す絶好のチャンスが失なわれる！

以下では,「双方向性」を数学的に実現する仕組みとしての「双対性」を手掛かりに，上の課題の具体化を試みたい。

2.4　双方向的認識とは？

物理的自然におけるミクロ・マクロ／量子・古典レベルの記述，あるいはそこでの［記述対象 vs. 記述系］の相互関係を,「双対性」という数学的視点に立って「双方向的」な仕方でコントロールすること，およびそれを実現する理論枠を，描くべき「中味」と共に整備するための一つの方法論的視点。

《ミクロ自然を記述する「窮極」理論から全てのマクロ現象を一方的・一方向的に演繹・導出せよ》との標

準的考え方とは対照的に,「双方向性」の観点では
ミクロ $\longrightarrow$ マクロ，マクロ $\longrightarrow$ ミクロの往復移動と
それが演ずる理論的役割を重視する。

「窮極」理論のお手本は多分 Einstein の一般相対論。興味深いことにその理論は，物質運動（ミクロ）と幾何学的時空（マクロ）の間を貫く双方向的・相互規定的な関係：

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\kappa T_{\mu\nu}$$

：bottom-up feedback

$$\longrightarrow$$

物質運動 $T_{\mu\nu}$ (ミクロ)　　時空構造 $g_{\mu\nu}$ (マクロ)

$$\longleftarrow$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\text{重力}$$

：top-down control

を理論的核心に持つ。他方メタレベルには,「物理学の幾何学化」，即ち「記述されるもの= 物質運動・物理現象」を「記述するもの= 幾何学的窮極理論」の中に一方向的演繹的に吸収・包括・統合しようという，相反する志向性が同居する。

2.5　ミクロ・マクロ双対性

もちろん「双方向性」を一般的に強調しても具体化の手立てなしには題目倒れに終わるしかないが，幸い数学の基本概念の中には双方向性の本質を体現した「双対性」という恰好の理論的装置がある。例えば局所コンパクト可換群の Fourier-Pontryagin 双対性：

$$\begin{aligned} L^1(G) \ &\ni \ f \longleftrightarrow \mathcal{F}f \in L^\infty(\hat{G}); \\ (\mathcal{F}f)(\chi) \ &: \ = \int \overline{\chi(g)} f(g) \ (\chi \in \hat{G}), \end{aligned}$$

やその本質を
コンパクト非可換群に拡げた淡中-Krein 双対性,
更に任意の局所コンパクト非可換群まで取り込んだ辰馬双対性 [Tatsma] は,
群と群双対（あるいは群表現の圏）との間の双方向的関係を律する双対性の典型例を与える。

以下で論ずるのは,「**ミクロ・マクロ双対性**」[IO05, MicMac] という数学的方法論に基づいて,
マクロ → ミクロの「帰納」を**表現論的双対性**として取り込み，それによって
「ミクロ ⇄ マクロの双方向性」や「理論の適用限界」の整合的扱いを可能にする理論枠を整備すること。

このため，群双対性の本質を環への群作用と絡めてガロア理論の文脈にまで拡げ，
接合積(= 作用素環を係数とする Fourier 変換)
及びそれを律する竹崎双対性

$$(\mathcal{M} \rtimes G) \rtimes \hat{G} \simeq \mathcal{M} \otimes B(L^2(G))$$

[TakDual, TakDual2] とが,「量子古典対応」の理解においてどのように有効に働くかを考える：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\rtimes G} & \mathcal{M} \rtimes G \\ \wr\!| & & \wr\!| \\ \mathcal{M}^G \rtimes \hat{G} & \xleftarrow[\rtimes \hat{G}]{} & \mathcal{M}^G \end{array} .$$

要するに「ミクロ・マクロ双対性」とは，こういう群と表現の間の双対性や，力学系= [代数への群作用] にそれを拡張したガロア理論での双対性等を系統的に物理に持ち込み，複数レベル間の関係を，ミクロかマクロか，量子か古典か，一方向からだけ見るのではなく，両者の間を自由に行き来する双方向的視点から解明しようというプログラム [IO05, Amp, QFT, Dialog]：ミクロからマクロへの「フィードバック」・「創発」の側面だけではなく，マクロからミクロへの「制御」・「拘束」・境界条件という両方向のベクトルに着目して，その相互関係を考える，という形で。

「**双対性**」に基づくこの**双方向性**の重要な意味は，それが **Duhem-Quine パラドックス**に対する唯一の肯定的解決を与えるということ [IIAS]: その理由は，
双対性 (或いはその圏論的一般化である adjunction) を満たすよう再構成= 帰納されたミクロ系は,「指定された文脈」での一意解としての “universality” を持ち，ちょうど問題とする文脈・側面・精度で要求される全ての「仮説ミクロ系」の中での「普遍解」を与えるから。

このような「普遍解」を供給するところに「**帰納法**」の論理的・概念的・実際的な有効性とその基礎づけが見出される (「量子古典対応」だけだとミクロ → マクロの一方向しか意識されてない点で不十分)。

この方向を拡張し，統計的推定論の概念装置を然るべき形で取り込めば，実験データの処理・解釈に関わる前述の偶発的問題も，理論的射程に取り込めるかも？

具体的展開は step by step に進むしかないとして，
一方向的・演繹的に導出された「科学的結論」を feed-back loop なしに一方的に自然・人間に押しつけて進んできた２０世紀科学・工学の限界を乗り越えるため今重要なのは，ミクロとマクロの間で両者を媒介する

こういう「**双方向性**」であり，その展開と活用こそ２１世紀の科学における重要課題の１つではないか？「**ミクロ・マクロ双対性**」という数学的手法に含まれる概念的中味を一言で言えば，そういうことになるかもしれない。

3　ミクロ⇄マクロ双対性

全体の見取り図

- 量子と古典，ミクロとマクロの基本配置
  量子 vs. 古典：　非可換vs. 可換
  ミクロ vs. マクロ:　scale

	量子		古典
マクロ	[巨視的量子効果]		マクロ古典
		↗↙	
ミクロ	ミクロ量子		??

「対角項」（特に，巨視的量子効果！）の重要性は無視できないが，以下ではミクロ量子⇄マクロ古典の問題に焦点化する

- 帰納と演繹，分析と総合，可逆と不可逆，
  未知 vs. 既知： 方程式論・ガロア理論
  対象系 vs. 記述系 (= 基準参照系),
  generic vs. specific： 分類問題 = adjunction,
  universality = 外延的に特殊な基準系の内包的普遍性

	古典	マクロ
generic		specific
ミクロ	量子	

  対象系 vs. 背景・“環境” ← “平均場近似”
  ゆらぎ vs. 構造・秩序
  粒子 vs. 場
  feedback vs. 制御

- マクロの「非自明な役割」=「分類指標」とその “universality” [QFT, Dialog]：
  未知の「generic な」対象を分類し解釈するためには，既知の標準的な「見本･標本」を沢山用意し，興味のある文脈に関係する側面について見本と同じ性質を持つ「未知」対象は，その側面に関して見本と同じ，という割切りをする。これが「分類」であり,「見本」（とその「名前」）は「分類指標」･「語彙」として機能する。「見本･標本」たちは既知

の「特殊」なものだが，未知の「generic なもの」と**いつでも自由に比較可能**という意味での「**universal なつながり**」の存在がここで本質的な役割を演ずる。
例えば,「時計」それ自身は一つの「特殊な」物理的運動に「過ぎない」が，変化する現象の追跡において事象を絶えず時計の針の位置と **universal な仕方で関連づけることを通じて**,「時間」という普遍的「ラベル」が「基準参照系」としての時計によって与えられる。「時間」概念の本質は，元々この意味での **universal な参照関係**，それを支える**諸運動相互の相関のネットワーク**の中にあり，それを離れて成立するものではない。しかるに，この相関ネットワークの外に出ることが不可能な我々 [[: 我々が「**存在する**」とは**既にこのネットワークの中にある**ということと等価。それが「**過程的存在論**」ということの本質！「我思う，ゆえに我在り」よりも,「我動く，ゆえに我在り」]] には，この相関ネットワークの存在とそれを通じての universal な参照関係は,「空気のように」当たり前で「自明なもの」としか意識されない。そのため，時間概念の現実的基礎として運動相関のネットワークが果たす非自明な役割は容易に忘れ

られ，それとは独立に「抽象的な時間なるもの」があたかも宙に浮いて「存在」するかのように錯覚したり，逆にその「実在性」を「モノとしての時計」の中に探し求め「時間とは時計によって測られる（実体不明の）モノ」という即物的「理解」にとらわれたり，ということ（および両者の往復）がしばしば繰り返される。これがいわゆる「時間の謎」の正体。

3.1 ミクロ・マクロ，量子・古典の基本的記述枠

(See [Basic, QFT])

物理量の代数 $\to$ 状態 $\overset{\text{GNS 構成}}{\rightleftarrows}$ 表現

状態= 期待値汎関数=「ミクロゆらぎ=運動」を積分し不変な形に取込んだもの
物理量の代数 $\mathcal{A}$ 上の任意の状態 $\omega : \mathcal{A} \ni A \longmapsto$

$\omega(A)$ は，GNS 構成法 $(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega, \Omega_\omega)$ により Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_\omega$ 上の演算子 $\pi_\omega(A)$ と状態ベクトル Ω_ω で表せる：

$$\omega(A) = \langle \Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle, \tag{1}$$

$$\overline{\pi_\omega(\mathcal{A})\Omega_\omega} = \mathfrak{H}_\omega \tag{2}$$

密度行列で書かれた混合状態 $\omega_\rho(A)$ =Tr(ρA) まで１個の状態ベクトル Ω_ω で書けるのか？: Yes!
「状態ベクトルは純粋状態，密度行列は混合状態を表す」という「常識」は正しいか？:

密度行列 $\rightarrow$ 状態ベクトル: Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の密度行列を ρ とすると，$\rho^{1/2}$ は Hilbert-Schmidt 演算子のなす Hilbert 空間 $\mathcal{S}(\mathfrak{H}) = \{\tau \in B(H); Tr(\tau^*\tau) < \infty\}$ の「ベクトル」で，混合状態 ω_ρ は

$$\begin{aligned} \omega_\rho(A) &= \mathrm{Tr}(\rho A) = \mathrm{Tr}(\rho^{1/2} A \rho^{1/2}) \\ &= \langle \rho^{1/2}, \pi_{\omega_\rho}(A)\rho^{1/2} \rangle_{H.S.} \end{aligned}$$

と書ける。ただし，$\langle \sigma, \tau \rangle_{H.S.} \equiv$Tr$(\sigma^*\tau)$ は Hilbert-Schmidt 内積で，$\pi_{\omega_\rho}(A)\xi \equiv A\xi \quad (\xi \in \mathcal{S}(\mathfrak{H}))$。
もし $\mathcal{S}(\mathfrak{H})$ 上の全てのエルミート演算子 $(\in B(\mathcal{S}(\mathfrak{H})))$ が観測可能なら $\rho^{1/2}$ も純粋状態！
状態ベクトル $\rightarrow$ 密度行列: 逆に，観測可能量の代数

$\mathcal{A}$ が状態空間の直和分解 $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{H}_N$ について「ブロック対角的」

$$\mathcal{A} \ni A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_N \end{bmatrix}$$

なら，状態ベクトル $\Psi = \oplus_{i=1}^{N} \Psi_i \in \mathfrak{H}$ は $N > 1$ のとき $\mathcal{A}$ 上の混合状態

$$\langle \Psi, A\Psi \rangle = \sum_i \langle \Psi_i A_i \Psi_i \rangle$$

で，$N = 1$ かつ $\mathcal{A} = B(\mathfrak{H})$ のときのみ純粋状態。

E.g. 《ボーズ粒子とフェルミ粒子の重ね合わせは「無意味」で，それらの状態ベクトルの線型結合は考えるべきではない》という主張がよくなされるがこれは間違い！
この場合，どんな観測可能量 A もボーズ成分 $+$ とフェルミ成分 $-$ をつなぐ非対角項を持たず：
$A = \begin{pmatrix} A_{++} & 0 \\ 0 & A_{--} \end{pmatrix}$，重ね合わせを検知する物理量が存在しないため，ボーズ・フェルミの「重ね合わせ」状態はボーズ粒子とフェルミ粒子を確率的に混ぜ合わ

せた混合状態になる。実際，$\psi = \psi_+ \oplus \psi_- = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$ に対する期待値は

$$
\begin{aligned}
& \langle \psi | A \psi \rangle \\
= \ & \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} |\psi_+\rangle\langle\psi_+| & |\psi_+\rangle\langle\psi_-| \\ |\psi_-\rangle\langle\psi_+| & |\psi_-\rangle\langle\psi_-| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{++} & 0 \\ 0 & A_{--} \end{pmatrix} \\
= \ & \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} |\psi_+\rangle\langle\psi_+| & 0 \\ 0 & |\psi_-\rangle\langle\psi_-| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{++} & 0 \\ 0 & A_{--} \end{pmatrix} \\
= \ & \mathrm{Tr}\, \rho A
\end{aligned}
$$

となり,「混合状態」 $\rho = |\psi_+\rangle\langle\psi_+| + |\psi_-\rangle\langle\psi_-|$ に帰着する。ψ_+ と ψ_- の数学的「重ね合わせ」はいつでも作れるが，非対角項 A_{+-} を持つ観測可能量が存在しなければ，単に混合状態として機能するだけ。

このように，ある状態が純粋か混合か，または，
状態ベクトルで書けるか密度行列で書けるかは，
どんな物理量の代数上の状態と見るか，
および，Hilbert **空間上でどう表現するか**，
に応じて如何様にでも変わる。
同じ状態ベクトルでもどんな物理量を通してそれを見るかによって意味が変わるから，物理量の代数と無関係に状態ベクトル Ψ だけをいくらひねり回しても，純粋状態か混合状態かは判別不能！

「状態ベクトルは純粋状態，密度行列は混合状態」との「常識」は，$\mathfrak{H}$ 上の演算子 $\in B(\mathfrak{H})$ 全てが観測可能との先入観に基づく皮相な形式論。
ここでの重要な教訓は,《物理的内容は**物理量と状態の相互関係 (= duality!!)** によって記述され，何れか一方のみで自然な物理的内容を表すことは不可能》ということ。

歴史的にはこのボーズ・フェルミ超選択則の理論的解明のため，量子論の重ね合わせ原理が意味を持つ状態の集まりを「セクター」と呼んで，そこからセクター理論が始まった。

1. 「**量子古典境界**」とは?:
   量子古典対応と有限自由度 vs. 無限自由度

   "明快な現象記述" には適切な記述言語の**選択**とそれに基づく現象の "**分節化**" が不可欠。
   しかし，分節の仕方に記述内容は依存する！

   記述言語の選択 $\simeq$ 物理現象の記述に用いる物理変数・観測可能量とその測定法の指定

“分節化”：**本来明確に境界づけられてないもの**に条件的妥当性（= 近似精度の設定）を持つ仕切り= 境界を入れ [→ **selection criteria & 分類基準**],

境界内部の暫定的“均一性” [→**セクター**= **相** with **intra-sectorial** structures] と
境界によって区別される “異質性” [:**inter-sectorial** structures described by **order parameters**] とを持ち込むこと。

分節化→ (分類⇄ 記述)→ 解釈

(a) 量子力学（= **有限自由度**系の量子論）に「量子古典境界」は内在しない !:
∵) **有限自由度**⟹ **Stone-von Neumann 定理** = 正準交換関係(= CCR of x & p) の既約表現の**一意性**
つまり，Stone-von Neumann 一意性定理により**有限自由度系**の量子力学は，最初から[単一セクターの内部構造]だけを論ずる状況設定のため，[セクター間 & セクター内という**2つのレベルは存在しない** → 量子古典境界の欠

如 → ミクロ／マクロの外在的分離・切断]。このため，理論の出発点で物理量の代数の選択に頭を悩ます必要がない代わりに，量子古典，ミクロマクロの関係を解明する理論的可能性は最初から閉ざされている。通常の量子力学でマクロ古典レベルが「理論外の外的要因」と見做され，ミクロ→マクロの扱いが「直観的恣意的」議論に流れ易い理由は，この事情に基づく。

(b) これに対し，無限自由度量子系では [**セクター概念＝ 純粋相＝ 量子古典境界**] (see below) **により**ミクロ・マクロ間の重要な接点を同定し，

[凝縮したミクロ] ＝ マクロ

という量子古典対応の自然な描像に基づく両者のつながりが回復可能！

e.g. **condensation** due to ∞-degrees of freedom (e.g., van Hove model)

セクター構造の認識だけで量子古典，ミクロマクロに関わる問題が全て“解決する”わけではないが，そのための不可欠の前提条件としてこれなしでは問題の基本構造が見えなくなる！

3.2 セクターとは?: 準同値性による状態分類とセクター= 純粋相の定義

物理量の代数 $\mathcal{A}$ 上の**状態** $\omega : \mathcal{A} \ni A \longmapsto \omega(A)$ とその GNS 表現 $(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega, \Omega_\omega)$ s.t. $\mathfrak{H}_\omega = \overline{\pi_\omega(\mathcal{A})\Omega_\omega}$ & $\omega(A) = \langle \Omega_\omega | \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle$
$\Longrightarrow$ 状態の分類は基本的に「表現の分類」に帰着。
量子力学でのお馴染は「ユニタリー同値性」
$\pi_1 \cong \pi_2 (\Longleftrightarrow \exists U$: unitary s.t. $\pi_1(A) = U\pi_2(A)U^*)$
だが，現実の物理系をそれと接する「外界・環境」から分離することの困難を考慮すると，この分類基準は細か過ぎ $\Longrightarrow$ 少々「撹乱・摂動」が加わっても安定な分類基準として**準同値性**= **unitary equivalence up to multiplicity!!**

例えば，$\mathcal{A}$ の既約表現 π_0 に対し，
$n\pi_0 := \underbrace{\pi_0 \oplus \pi_0 \oplus \quad \cdots \oplus \pi_0}_{n}$ と $(n+1)\pi_0$ はユニタリー非同値, $n\pi_0 \not\cong (n+1)\pi_0$, だが,
両者の「実質的内容」は同じ π_0 でその重複度が 1 違うだけだから準同値： $n\pi_0 \approx (n+1)\pi_0$。
無限自由度量子系の物理量の表現についてより重要な

点は：
1) ユニタリー同値性による分類では，その最小単位である既約表現にまで常に分解できるとは限らない。
$\because$) 勝手な表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ の既約分解には，commutant $\pi(\mathcal{A})' = \{B \in B(\mathfrak{H}); [B, \pi(\mathcal{A})] = 0\}$ が c-数になるまで直和分解=**同時対角化**することが必要だが，一般に $\pi(\mathcal{A})'$ は非可換ゆえそれは不可能：
$\pi(\mathcal{A})'$ が**同時対角化**可能 $\Longleftrightarrow$ $\pi(\mathcal{A})'$ が**可換**!!
2) それに対し，準同値性による分類では，commutant $\pi(\mathcal{A})'$ でなく $\pi(\mathcal{A})''$ の centre $\pi(\mathcal{A})'' \cap \pi(\mathcal{A})' =: \mathfrak{Z}(\pi(\mathcal{A})'')$ という**可換環の同時対角化**によってその最小単位 = **factor 表現** π_λ with $\mathfrak{Z}(\pi_\lambda(\mathcal{A})'') = \mathbb{C}1$ まで分解可能。この準同値類の最小単位である **factor 表現**（の準同値類）として**セクター** = **純粋相**を定義する [QFT, IO03]。
準同値性の「反対」は **disjoint**ness: $\pi_1 \overset{|}{\circ} \pi_2$
$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{I}(\pi_1, \pi_2) := \{T : \mathfrak{H}_{\pi_1} \to \mathfrak{H}_{\pi_2}; T\pi_1(A) = \pi_2(A)T$ for $\forall A \in \mathcal{A}\} = 0$:

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(\mathcal{A})' \ni \begin{pmatrix} * & T^* = 0 \\ T = 0 & * \end{pmatrix}: \text{非対角項} = 0$$

- 可換性／非可換性と非対角項: 準同値関係による《可換化のメカニズム》

$\rightarrow$ **量子古典境界**$=$ **相**$=$ **セクター**： factor 表現 with trivial centre
[ミクロ $=$ 不可視 or 未知, generic]
$\rightleftarrows$ [マクロ $=$ 可視 or 既知, specific]
非可換性 $\sim$ 非対角項 $\sim$ intertwiners $\sim$ 不確定性・量子ゆらぎ

可換性$\Longleftrightarrow$**同時対角化**可能$=$**非対角項の一斉消去**
代数 $\mathcal{N}$ が可換$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{N} = \mathfrak{Z}(\mathcal{N})(= \mathcal{N} \cap \mathcal{N}')=$ centre of $\mathcal{N}$
factor $\mathcal{M}$ with trivial centre $\mathfrak{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}1$ とは, ちょうど可換性の「裏返し」
量子力学の「**重ね合わせの原理**」とは, **非対角項** $=$ **量子ゆらぎ** (**状態遷移と量子論的干渉性**) を記述するもの

- 相間構造 (inter-sectorial structure)

$$\begin{cases} \text{実空間での相共存}(\leftarrow \text{創発}) \\ \text{確率的相共存}=\text{混合相}(\leftarrow \text{増幅}) \end{cases}$$

相間構造 (described by 可換 $\mathfrak{Z}(\mathcal{M})$) vs. 相内構造 (described by factors)

古典レベル= order parameters belonging to **centre due to disjointness** [$\Longleftrightarrow$ centre as order parameters]

$\Uparrow$ 増幅 $\rightarrow$ 創発

量子＋古典= 混合相

= 「量子論的**重ね合わせの原理**」**が無効**なレベル

i.e., 異なる相の間の物理量の**非対角項**= 0 [$\Longleftrightarrow$ disjointness $\Longleftrightarrow$ order parameters] のため状態ベクトルの線型結合が混合状態に帰着する

- 相内構造 (intra-sectorial structure)

  = 純粋相の内部構造 [IO05]：

  量子力学 with **type I** algebras:「重ね合わせ」OK

  量子統計力学 with **type II** algebras

  $\uparrow\downarrow$ 竹崎 duality

  量子場 described by **type III** algebras

  相内構造 $\mathfrak{Z}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}) = \mathcal{A}$ as *conditional sector structure*

  物理量の**非対角項** = 非可換性の起源

3.3 Selection criteria= 方程式→ ガロア拡大

Selection criteria に基づく**ミクロ・マクロの**統一的記述枠 [IO03]:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \textbf{(ミクロ)} & \textbf{(マクロ)} \\
\text{i)}\left[q:\ \begin{array}{c}\text{対象系の}\\ \text{generic states}\end{array}\right] & \Longrightarrow & \text{ii)}\left[c:\ \begin{array}{c}\textbf{分類空間として}\\ \textbf{の参照基準系}\end{array}\right] \\
 & \uparrow\uparrow & \\
 & \text{iii): } \textit{i)} \text{ と } \textit{ii)} \text{ を比較する写像} & \\
 & \Uparrow & \Downarrow \\
\text{iv)}\left[\begin{array}{c}\textbf{selection}\\ \textbf{criterion}:\\ \text{ii)} \underset{\textit{c-q}}{\Longrightarrow} \text{i)}\end{array}\right] & \underset{\rightleftarrows}{\textit{adjunction}} & \left[\begin{array}{c}\text{ii) に基づく i) の分類}\\ \text{と解釈: i)} \underset{\textit{q-c}}{\Longrightarrow} \text{ii)}\end{array}\right]
\end{array}
$$

: **matching condition** between what to be classified & what to classify
これは次の例の自然な拡張を与える：

- **Example 2** 多様体 M *with local charts* $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n)\}$*:*
  i)= 局所近傍 U_λ, *ii)*= $\mathbb{R}^n$,

iii)= *local charts* $\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n$,
iv)= 幾何学的不変量による解釈 *(*ホモロジー, コホモロジー, ホモトピー, *K*-群, 特性類, *etc.)*

ミクロ・マクロ双対性： 異なるレベル・スケール領域の間の相互関係

量子古典対応の数学的表現としての《ミクロ・マクロ双対性》の種々相 ([IO05], see below): その何れもマクロ古典レベルの universality が本質的な役割を演ずる [IO03]:

$$\begin{tikzcd}
\left[\begin{array}{c}\text{B) セクター理論}\\ \text{の}\textbf{再定式化}\text{:}\\ \text{離散セクター}\end{array}\right] \arrow[d] & \left[\begin{array}{c}\text{A) }\textbf{非平衡局所}\\ \textbf{状態の定義}\text{:}\\ \text{連続セクター}\end{array}\right] \arrow[dl] \\
\left[\begin{array}{c}\text{C) }\textbf{自発的破れ}\\ \text{のセクター構造:}\\ \text{離散+連続セクター}\end{array}\right] \arrow[r] \arrow[d] & \left[\begin{array}{c}\text{D) selection criteria}\\ \text{に基づく}\textbf{ミクロ・マクロ}\\ \textbf{の統一的記述枠}\end{array}\right] \arrow[d] \\
\left[\begin{array}{c}\text{E) }\textbf{明示的に}\\ \textbf{破れた対称性}\end{array}\right] & \left[\begin{array}{c}\text{F) 相内構造の測定・増幅}\\ \text{とミクロ・マクロ双対性}\end{array}\right]
\end{tikzcd}$$

A) 相対論的量子場理論における**非平衡局所状態**の一般的定式化 [BOR, IO03a];

B) 破れない内部対称性に関する DHR-DR セクター理論 [DHR] の**再定式化** [IO03];

$$[\text{ガロア群 } G \curvearrowright \mathcal{F} = \mathcal{A} \rtimes \hat{G}] \underset{\text{ガロア拡大}}{\overset{\text{方程式を解く}}{\rightleftarrows}}$$

$$[\mathcal{F} \rtimes G \ \approx \mathcal{F}^G = \mathcal{A} \overset{\text{方程式}}{\curvearrowleft} \hat{G}\text{: 解}]$$

C) **自発的に破れた対称性** *(SSB)* へのセクター理論の拡張 [IO03];

D) **ミクロ・マクロ関係を** *selection criteria* に基づいて記述する統一的枠組 [IO03a, IO03];

E) **明示的に破れた対称性への拡張**およびスケール不変性の（明示的）破れに伴う秩序変数としての温度 [IO04];

F) 測定・増幅過程の一般的記述とマクロデータからのミクロ系の再構成 [IO05, MicMac].

3.4 Fourier-Galois 双対性

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{量子古典複合系} = \text{混合相} & \\
\text{量子系} \arrow[ur] & \text{測定・創発} \rightleftarrows \text{制御} & \text{古典系} \sim \mathfrak{Z}(\mathcal{M}) \arrow[ul] \\
 & \text{Dynamics} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

量子古典複合系 = 混合相を考えることで，量子／古典の境界を動かすことが可能になる
物理系の**双方向的**扱い = [**feedback・創発**／記述・分類・解釈 $\rightleftarrows$ dilation・**再構成**／**制御・デザイン**]

ガロア理論の文脈: **対象系＋記述系を couple させる「合成系」**の構成 $\rightleftarrows$ 部分系への分解= **接続**

+ Fourier duality = ［ミクロ $\rightleftarrows$ マクロ］

Fourier-Galois 双対性：[ガロア群 $G \curvearrowright \mathcal{F} = \mathcal{A} \rtimes \hat{G}$]

$$\underset{\text{ガロア拡大}}{\overset{\text{方程式を解く}}{\rightleftarrows}} \quad [\mathcal{F} \rtimes G \approx \mathcal{F}^G = \mathcal{A} \overset{\text{方程式}}{\curvearrowleft} \hat{G}\text{: 解}]$$

測定過程 $\hookrightarrow$ **応答理論** $\hookrightarrow$ ガロア方程式論
$\because$) [測定過程における **coupling**]
$=$ [**対象系** $\overset{\text{作用}=\text{「外力刺激」}}{\curvearrowleft}$ **測定系= 外力系**]
$\Longrightarrow$ この「外力刺激」への「**応答**」$=$ ［測定相互作用で引起こされた probe system の状態変化およびその増幅結果]$\Longrightarrow$測定結果，ということだから。

量子観測による相内構造 (intra-sectorial structure) の実験的検索のためには：
知ろうとする属性に応じた対象系の観測量として適切な**極大可換部分環** $\mathcal{A}$ を選び,
$\mathcal{A}$ を生成するユニタリー群 $\mathcal{U}$ をこの刺激応答過程における測定系＝外力系とすると,
「外力刺激」$=$ 群 $\mathcal{U}$ の作用 $\overset{\textbf{Fourier 変換}}{\Longrightarrow}$ [双対群 $\hat{\mathcal{U}}$ で記述された応答]への変換が
Fourier 変換で与えられる $\Longrightarrow$ F) の内容 [MicMac]

3.5 対称性とその破れと創発=[ミクロ→マクロ]

$\pi \approx (\pi \circ \tau_h)$: 準同値なら $h \in H$ は unbroken で,

$\pi \circ \tau_h(A) = U(h)\pi(A)U(h)^*$ を満たす H の unitary 表現 $H \ni h \longmapsto U(h)$ が存在

$\pi \overset{|}{\circ} (\pi \circ \tau_g)$: disjoint なら $g \in G \diagdown H$ は broken
$\Longrightarrow$ sector 構造は sector bundle $G \times_H \hat{H} \twoheadrightarrow G/H$ で記述される:
G/H の各点は「縮退真空」の１つ１つに対応し,
そこに値を取る場 $x \longmapsto \varphi(x) \in G/H$ が **collective mode** としての **condensation**= **平均場**に対応 [IO03]

Perspective [QFT, Amp, IIAS03]

1. [セクター= 純粋相= **量子古典境界**]
   + [**ミクロ・マクロ双対性**](⊃ [マクロ $\overset{\text{再構成}}{\rightarrow}$ ミクロ]= 「帰納法」) が pivotal !!
   「**双方向的**記述」⊃ 「帰納法」の重要性と具体例
   → Maxwell & Einstein 方程式
   ↓

2. **混合相= 量子古典複合系 = 複数の異なる相の virtual な確率的混合**
   ↓ 増幅＋創発過程

3. **相共存**= [実空間における**複数相の空間的共存・「棲み分け」**]

(a) **相共存** $\Longrightarrow$ **相境界** $\Longrightarrow$ **時空創発**

「実空間における」という上の表現には，[既に実空間が存在し，その異なる「場所」に異なる**相が局在化**する] というニュアンスが不可避的に伴うが，物理的には，相共存に伴う**相境界形成を通じて初めて「実空間」が現実化・物理化する**= **時空創発**，と捉えるべき！

∵) 単一相内部の「相内構造」は，それを検出する量子観測過程なしには不可視であり，単一相のみ存在する空間領域でその内部の空間点を**物理的に**識別することは不可能。この意味で，単一相= （空間的）「無構造」であり，相境界が入り込んだ領域の空間点だけが物理的に識別可能となる

我々が「理論の出発点」で採用した "5W1H" scheme の when & where は，それが何に由来し，どんな仕組み・理由で使い物になるのか？ということを実は我々は本当の意味では何も知らなかった！経験的にその有用性を知っていただけ！

ミクロ・マクロ双対性の文脈において《時空創発》の物理的メカニズムを問うことによって，我々は初めてその由来を知ることになる！ここでは既知と未知が出発点と逆転していることに注意されたし。つまり,《物理学の幾何学化》とは全く逆に,《幾何学の物理学化》がここでの重要問題！

(b) 対称性の自発的破れに伴う**縮退真空の領域構造**と相共存・相境界

(c) **時空創発** $\Longrightarrow$ **局所ゲージ不変性／くりこみ理論** [[IO08]: QBIC 2008 talk]
Higgs 機構 & type II 超伝導体の Ginzburg-Landau 理論

(d) **対称性とその破れ**に関わる**熱的効果**：
e.g., **ヒステリシス，低エネルギー定理** $\rightarrow$ **Broken Ward-Takahashi identities**

References

[QFT] 小嶋　泉，だれが量子場を見たか，江澤洋先生退職記念数理物理シンポジウム（2003 年 3 月 25 日於学習院大学）の講演集『だれが量子場をみたか』 (日本評論社，2004)，pp.65-107; 自然 vs. 科学 I，『数学セミナー』 1993.2，pp.58-68; 自然 vs. 科学 II，『数理科学』 1994.2 (No.368)，pp.9-15 (オリジナルは Ojima, I., Nature vs. Science. I & II, Acta Inst. Phil. et Aesth. **10**, 55-66 (1992); **11**, 77-99 (1993)).

[IO03a] Ojima, I., How to formulate non-equilibrium local states in QFT? – General characterization and extension to curved spacetime –, pp.365-384 in "*A Garden of Quanta*", World Scientific, 2003 (cond-mat/0302283).

[IO03] Ojima, I., A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria

–Order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings of adjunctions–, Open Systems and Information Dynamics, **10** (2003), 235-279; 小嶋　泉，場の理論と演算子：量子場とは？『数理科学』 2004.4, pp.19-25.

[Amp] 小嶋 泉，ミクロ・マクロ双対性 – ミクロ量子系をマクロ観測データから 再構成する数学的方法 – 京都大学数理解析研究所講究録 No.1532, 情報物理学の数学的構造 pp. 105 – 117 (2006); Micro-Macro duality and emergence of macroscopic levels, Quantum Probability and White Noise Analysis, **21**, 217 – 228 (2008); A unified scheme of measurement and amplification processes based on Micro-Macro Duality – Stern-Gerlach experiment as a typical example –, in preparation (with R. Harada).

[IIAS03] Ojima, I., Generalized sectors and adjunctions to control micro-macro transitions, pp. 274–284, in Quantum Information and Computing, QP-PQ: Quantum Probability and White Noise Analysis Vol.19 (2006).

[Basic] 小嶋　泉, 量子論の基本概念：その物理的解釈と超選択則,『数理科学』2002.7;『別冊・数理科学』2006.4, 特集「量子の新世紀」ー量子論のパラダイムとミステリーの交錯ー に再録；量子物理学の基本概念 （第I部第2章 pp. 45–74,『量子情報と進化の力学』, 牧野書店, 1996）

[Tatsma] Tatsuuma, N., A duality theory for locally compact groups, J. Math. Kyoto Univ. **6** (1967), 187-217; 辰馬伸彦,『位相群の双対定理』（紀伊國屋書店, 1994）; Enock, M. and Schwartz, J.-M., *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups*, Springer, 1992.

[IO05] Ojima, I., Micro-macro duality in quantum physics, pp.143–161 in Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum, World Scientific, 2005; 小嶋 泉, 量子場の観測過程, 『数理科学』 2005.10 (No.508), pp.18-25.

[MicMac] Ojima, I. and Takeori, M, How to observe quantum fields and recover them from observational data? – Takesaki duality as a Micro-Macro duality –, (math-ph/0604054 (2006)), Open Systems and Information Dynamics **14**, 307 – 318 (2007).

[TakDual] Takesaki, M.: Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta Math. **131**, 249-310 (1973); *Theory of Operator Algebras II*, Springer-Verlag, 2003.

[TakDual2] Nakagami, Y. and Takesaki, M., Lec. Notes in Math. **731**, Springer, 1979.

[Dialog] 小嶋 泉・谷村省吾, 双対性をめぐる物理学対話 – 量子と古典, ミクロとマクロ, 『別冊・数理科学』 2007.4, 特集「双対性とは何か—諸分野に広がるデュアリティ・パラダイム」, pp.34-44.

[IIAS] 国際高等研究所フォローアップ研究「量子情報の数理」報告集, to appear (2008); 小嶋　泉, 代数的量子論とミクロ・マクロ双対性,『数理科学』2007.7 (No.457), pp.18-23.

[BOR] Buchholz, D., Ojima, I. and Roos, H., Thermodynamic properties of non-equilibrium states in quantum field theory, Ann. Phys. (N.Y.) **297** (2002), 219 - 242.

[DHR] Doplicher, S., Haag, R. and Roberts, J.E., Fields, observables and gauge transformations I & II, Comm. Math. Phys. **13** (1969), 1-23; **15** (1969), 173-200; Local observables and particle statistics I & II, **23** (1971), 199-230; **35** (1974), 49-85; Doplicher, S. and Roberts, J.E., Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, Comm. Math. Phys. **131** (1990), 51-107; Endomorphism of C*-algebras, cross products and duality for compact groups, Ann. Math. **130** (1989), 75-119; A new duality theory for compact groups, Inventiones Math. **98** (1989), 157-218.

[IO04] Ojima, I., Temparature as order parameter of broken scale invariance, Publ. RIMS **40**, 731-756 (2004).

[IO08] Some Perspectives from Micro-Macro Duality – Towards non-perturbative renormalization theory –, Invited talk at Intern. Conf. in QBC (2008.3).