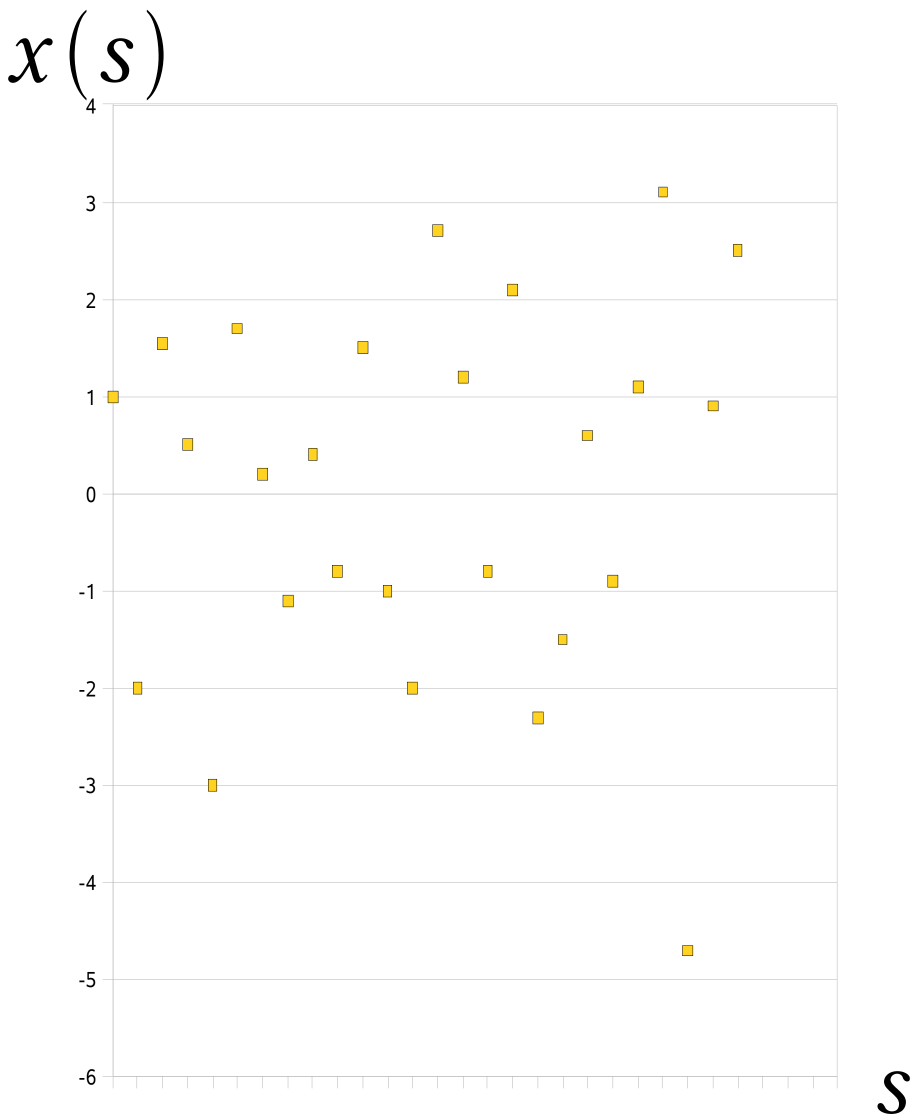
ホワイトノイズ解析

- 1975年に 飛田武幸 氏が基礎を確立した理論で、ブラウン運動の微分(ホワイトノイズ)の汎関数を用いる確率解析

- ヒルベルト空間を越える枠組みが特徴

- Gelfand tripleを用いた無限次元空間での超関数の理論)

ホワイトノイズ



- ホワイトノイズの見本経路 $x(s)$

Gelfand triple

シュワルツの超関数とテスト関数の概念の一般化
(例)

$$S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R})$$

さらにホワイトノイズ解析で重要なのは、S′(R)の上の関数空間である。

$$\boxed{(S) \subset L^2(S'(\mathbb{R}), \mu) \subset (S)^*}$$

$S'(\mathbb{R})$:ノイズの空間

μ :ノイズに対してガウスで重みづけられた測度

$(S)^*$:ノイズに対して特異にふるまう関数たち

飛田の微分作用素

$$(\partial_t \phi)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\phi(x + \varepsilon \delta_t) - \phi(x)}{\varepsilon}$$

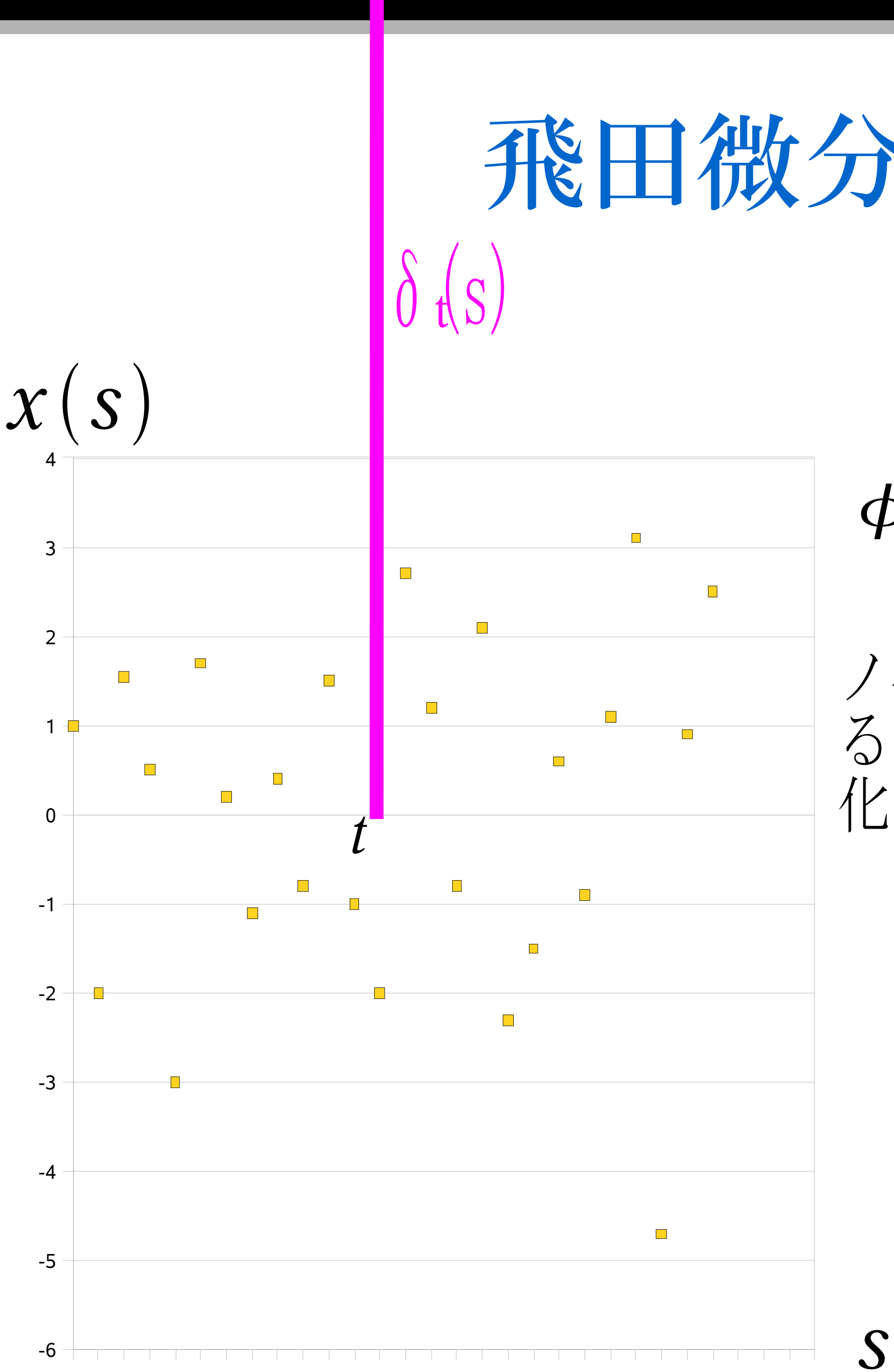
$$\phi \in (S),\ x \in S'(\mathbb{R})$$

(デルタ関数方向の微分)

- dual な演算子 ∂_t^* の定義式

$$\langle \partial_t \phi, \Phi \rangle = \langle \phi, \partial_t^* \Phi \rangle, \quad \phi \in (S), \quad \Phi \in (S)^*$$

飛田微分の意味



$\phi \in (S)$

ノイズに対する関数 ϕ のふるまいを調べるために、デルタ関数を加えたときの変化を見てみる。

- 正準交換関係を満たす:

$$\boxed{[\partial_s, \partial_t^*] = \delta(s-t)}$$

- 全ての演算子は生成・消滅演算子で展開できる(Fock 展開)

$\Xi : (S) \to (S)^*$ に対して

$$\boxed{\Xi = \sum_{l,m=0}^{\infty} \int \kappa_{l,m}(s_1, \dots, s_l, t_1, \dots, t_m) \partial_{s_1}^* \dots \partial_{s_l}^* \partial_{t_1} \dots \partial_{t_m} \, ds dt}$$

レヴィのラプラシアン

無限次元解析としてのホワイトノイズ解析の性格をよく反映したラプラシアン

$$\Delta_L = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2}$$

- 重要な性質

$$\Delta_L f = 0 \ , \ f \in L^2(S')$$

$$\Delta_L (fg) = (\Delta_L f) g + f \Delta_L g$$

ポイント：　ノイズに対して穏やかに変化する関数は消える。