

オルガンパイプにおける周波数引き込み現象

岡田昌大¹, 鎌木時彦²

¹九州大学大学院芸術工学府, ²九州大学大学院芸術工学研究院

1. はじめに

パイプオルガン (図 1) は流体现象に基づく発音機構を有しており, その非線形性からオルガンの詳細を解析するのは難しい. 一方, Rayleigh によって, パイプオルガンは周波数引き込み現象を示すことがわかっている¹⁾. さらにこれを詳細に調べた先行研究では, 同期理論から予測される性質が実際にオルガンのパイプにおいても観測されることを報告している²⁾. 以上を踏まえれば, パイプオルガンは同期理論の枠組みで解釈できる可能性がある.

しかしながら, 先行研究²⁾では基本周波数比 (周期比) が 1:1 の場合にしか言及されていない. そこで本研究では, 基本周波数比が任意整数比 $m:n$ となる周波数引き込みについて調べ, パイプオルガンと同期理論の対応を取ることにした.

2. 同期理論による予測

同期理論によれば, リミットサイクルを持つ非線形振動子は以下の位相モデルで表すことができる¹⁾.

$$\dot{\theta} = \omega + \mathbf{Z}(\theta) \cdot \mathbf{p}(t) \quad (1)$$

ただし, θ は位相, ω は自然角周波数, $\mathbf{Z}(\theta)$ は位相感受関数, $\mathbf{p}(t)$ は角周波数 Ω の周期外力である. $n\omega - m\Omega$ が小さいとき, (1)式を平均化すると

$$\dot{\phi} = -(n\omega - m\Omega) + \Gamma_{m,n}(\phi) \quad (2)$$

$$\Gamma_{m,n}(\phi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T n \mathbf{Z} \left(\frac{m\Omega s + \phi}{n} \right) \cdot \mathbf{p}(s) ds \quad (3)$$

となる. なお, $\phi = n\theta - m\Omega t$ である.

ここで, (3)式の被積分項について, 複素フーリエ級数を用いて記述すると

$$\Gamma_{m,n}(\phi) = n \sum_{j,l} A_{j,l} e^{i \frac{j}{n} \phi} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(mj+nl) \frac{\Omega}{n} s} ds \right] \quad (4)$$

と書ける ($i = \sqrt{-1}$). したがって, (4)式より, 積分実行後には $mj + nl = 0$ のみが残る.



図 1 パイプオルガン
(辻オルガン, 作品 44, 1987)

ところで, リミットサイクル上の状態変数を x としたとき, 自然角周波数は

$$\omega = \mathbf{Z}(\theta) \cdot \frac{dx}{dt} \quad (5)$$

と記述できる¹⁾. 先ほどと同様に, (5)式についても複素フーリエ級数で表示すれば

$$\omega = \sum_{j,k,k \neq 0} ik B_{j,k} e^{i(j+k)\omega t} \quad (6)$$

となる. よって, 平均化後には $j+k=0$ が満たされることがわかる.

以上より, $mk = nl$ が成り立つ. ここで, m と n が互いに素であることを考慮すれば, k は n を約数として含まなければならない. 同様に l についてもその約数に m を持つことが言える. つまり, リミットサイクルや周期外力に高調波がどの程度含まれるかによって, 起こり得る高次同期が決まる. すべての整数比ではなく, 物理的に, 周期外力に含まれる調波成分が, 振動子が持つ調波成分に近接することによって, 周波数引き込みが生じるのである.

3. 実測

3.1 方法

自励発振するオルガンパイプに対して, 外部から正弦波外力を当て, 周波数引き込み現象が起こるかどうかを観察した. 具体的には, オルガンの基本周波数の n/m 倍の周波数を含む狭周波数帯域について, 正弦波外力を 60 秒ごとに 0.2 Hz 刻みで増加させながらオルガンパイプに当て, そのときの音響信号を録音した (サンプリング周波数 44.1 kHz, 量子化ビット数 16 bit). 図 2 に実験系を示す. なお, 收音は簡易防音室で行った.

分析方法としては, 各 60 秒間の録音波形のうち, 後半の 40 秒間を 10 秒ごとに区切り, 離散フーリエ変換を通してパワースペクトルを 4 つ求めた後, これらを周波数ビンごとに平均した. なお, 離散フーリエ変換の際にはハニング窓を用いた.

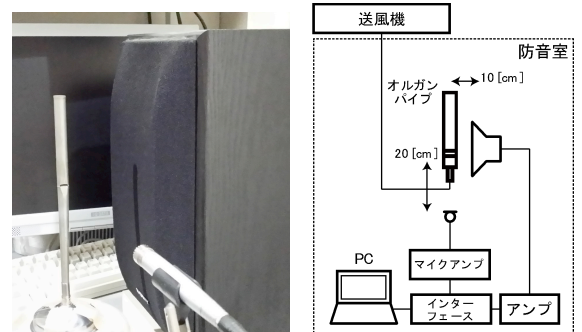


図 2 実験系

3.2 正弦波外力による周波数引き込み

まず、先行研究²⁾と同様の基本周波数比である(オルガン):(外力) = $m:n = 1:1$ について測定を行った。この結果を図3に示す。ここで、直線的に周波数変化するスペクトルが正弦波外力、広い幅を持つスペクトルがオルガンの基本音(第1倍音)である。この結果を見ると、オルガンの基本音と正弦波外力が近接している周波数帯(約1640.0~1641.2 Hz)において、両者が合体し、単一のスペクトルとして観測されていることがわかる。

次に、 $m:n = 1:2$ の周波数引き込みを試みた。これは音響学的にはオルガンの第2倍音への作用に対応する。この結果を図4に示す。第2倍音に関して、約3275.4~3279.2 Hzの範囲で周波数引き込みが起こっている(図4上)。また、同じ周波数範囲において、基本音の性質が幅を持ったものから直線的なものへと変化している(図4下)。このことから、オルガン音は外力に引き込まれたと言える。

これらの他に、 $m:n = 1:3, 2:1, 2:3$ についても検証を行った。その結果、正弦波外力がオルガンの第3倍音に作用する場合に相当する $1:3$ では周波数引き込みが起こり、オルガンが持つ調波成分に作用することのない $2:1$ や $2:3$ では特に変化がみられず、以上のような周波数引き込みは起こらなかった。

3.3 複合音外力による周波数引き込み

続いて、外力を複合音に変えて観測を行った。測定手順や実験系は正弦波外力の場合と同じであるが、複合音外力の基本周波数は0.1 Hz刻みで増加させた。そして、複合音外力には2種類を用意した。どちらも基本周波数は同じであるが、一つは基本音と第2倍音を足し合わせたもの、もう一つは基本音と第3倍音を合成したものである。ただし、これらの複合音は基本音のパワーと他の調波成分のパワーを等しくした。なお、ここからは $m:n = 2:1$ の周波数引き込みに焦点を当てる。このとき、2種類の複合音外力それぞれが持つ調波成分のうち、オルガン音の調波成分(基本音)と近接するのは外力第2倍音のみである。

まず、基本音と第2倍音を足し合わせた複合音を外力とした場合の結果を図5に示す。ここで特筆すべきことは、正弦波外力の場合には起こらなかった周波数引き込みが、外力に第2倍音を加えることで起こったということである。また、第2倍音の初期位相を 90° 遅らせた複合音外力を用いても結果は変わらなかった。つまり、これは周波数引き込み現象が外力の位相スペクトルには影響を受けないことを示している。基本音と第3倍音で構成した複合音を外力として用いた場合については、周波数引き込みが起こらなかった。

以上の結果より、オルガンパイプにおける周波数引き込み現象が、オルガンと外力のそれぞれが持つ

調波成分の近接によって引き起こされることを実証できた。

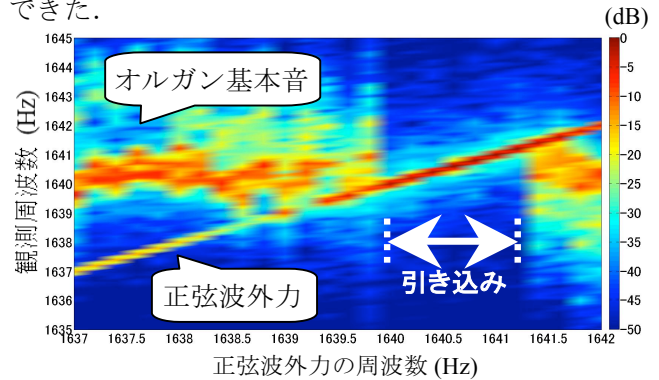


図3 基本周波数比 1:1 の周波数引き込み。

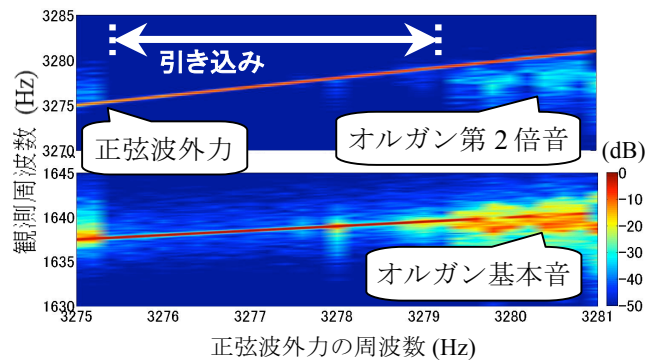


図4 基本周波数比 1:2 の周波数引き込み。

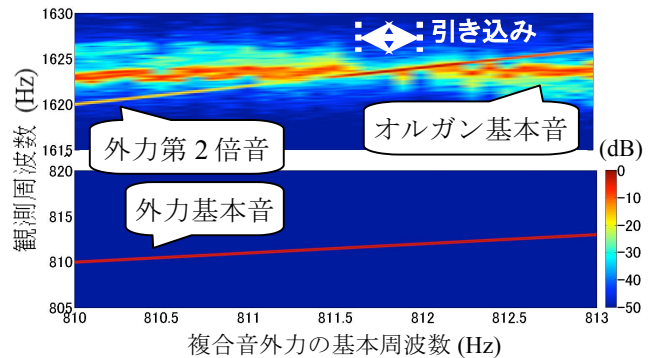


図5 複合音外力による周波数引き込み。

4. まとめ

本研究では、オルガンパイプにおける周波数引き込み現象について、同期理論の観点からその特徴を探った。その結果、外力に含まれる調波成分がオルガン音の調波成分に近接することで周波数引き込みを生じることがわかった。

謝辞

本研究を始めるにあたり、快くオルガンパイプを譲ってくださいました、須藤オルガン工房主宰の須藤宏さんに感謝申し上げます。

参考文献

- 1) A. Pikovsky *et al.*, "Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences," Cambridge University Press, New York (2001).
- 2) M. Abel *et al.*, *J. Acoust. Soc. Am.* **119**(4) (2006).