

樟脳船の集団運動に現れる渋滞現象の数理解析

池田 幸太¹, 栄 伸一郎², 友枝 明保³, 長山 雅晴²¹ 明治大学, ² 北海道大学, ³ 武蔵野大学

1. 序論

粒状に固められた樟脳を用いて作られた樟脳船を水面に浮かべると、ある条件下では自発的に動き出す⁶⁾。これは、樟脳から水面に展開される樟脳分子によって表面張力が低下することと、樟脳分子の濃度が昇華によって低下することが原因であると考えられている。自己駆動粒子が多数存在すると、一般に、相互作用に応じて自己組織的に構造体を形成しうる⁴⁾。実際、環状の水路に樟脳船が多数存在する場合を考えると、全ての樟脳船が一定速度、一定間隔で進行する状態（一様流）が不安定化し、密度差を伴った集団運動（非一様流）を呈することが知られている⁷⁾。この現象を理解する場合、単一の粒子が動くメカニズムだけでなく、粒子が複数個存在するときに示す、系全体としての振る舞いを調べる事が重要になる。

同様の現象は車の集団運動においても観測されるため、渋滞現象は、集団運動における普遍的な性質であると考えられている。しかしながら、樟脳船の運動は反応拡散方程式 (1) を用いて記述される一方で、車の集団運動は流体モデルや常微分方程式系等でモデル化されているため、両者に共通する数理的なメカニズムや普遍性が存在することは自明ではない。

本研究では、樟脳船の渋滞現象に注目し、その挙動を数理的に解明することを目的とする。まず樟脳船に関する反応拡散方程式 (1) の縮約モデルである常微分方程式系 (2) を導出する。次に、(2) の性質を調べ、得られた結果が、車の渋滞モデルとして知られている OV モデルにおいてよく知られている結果と近い性質を持つことを示す。この結果によって、樟脳粒と車の運動における数理的メカニズムがある意味では等しいことが示唆される。

2. 樟脳船に見られる渋滞流

本研究では次のモデル

$$\begin{cases} x_i'' = -\mu x_i' + \gamma(u(x_i + \rho, t)) - \gamma(u(x_i - \rho, t)), \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ku + \sum_{i=0}^N f(x - x_i, s) \end{cases} \quad (1)$$

を考察する^{5,7)}。本研究では周長 L の円周上を 1 次元的に動く $(N + 1)$ 個の樟脳船の運動を考える。 $i = 0, \dots, N$ に対して、時刻 t での i 番目の樟脳船の位置を $x_i = x_i(t)$ とする。また、水面の各点 x , 時刻 t での樟脳分子濃度を $u = u(x, t)$ で表す。樟脳分子濃度の増加とともに水面における表面張力は減少する。したがって、表面張力を表す $\gamma(u)$ は u の単調減少関数と考えられ、例えば $\gamma(u) = \gamma_1 / (1 + au)$ で与えられる。樟脳分子が樟脳船から水面に供給される速度は $f(x, s)$ で表され、

$$f(x, s) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \rho, \\ s, & -\rho < x < 0, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

とする。 $s \in [0, 1]$ は樟脳船の非対称性を表すパラメータである。各樟脳船の大きさは 2ρ で表されていることに注意する。

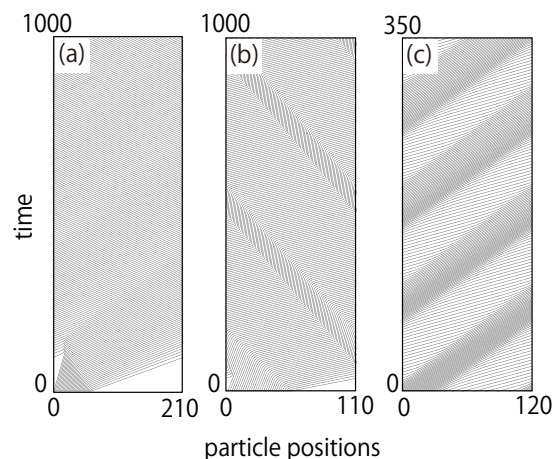


図 1: (2) に現れる時空パターン。

形式的な議論を行うと、(1) は縮約方程式

$$\begin{cases} z'_i = r_i, \\ r'_i = F(r_i) + M_b e^{-\alpha(z_i - z_{i-1})} - M_f e^{-\beta(z_{i+1} - z_i)}, \end{cases} \quad (2)$$

に単純化される^{2,3)}. ここでは周長 L の円周を考
えるので、 $z_i(t) = 0$ と $z_i(t) = L$ は同一視され
る. また、 $z_{N+1} = z_0 + L$, $z_{-1} = z_N - L$ とし
た. ここで $F(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3$ であり、
 $a_0, a_1, a_2, a_3, M_f, M_b, \alpha, \beta$ は定数である.

樟脳船における渋滞流を調べるため、(2) の解析
を行う. まず粒子密度を変化させ、解の時空パター
ンの変化を数値シミュレーションを用いて調べると、
図 1 を得る. この結果から、縮約方程式 (2) は渋滞
流を再現できることが分かった.

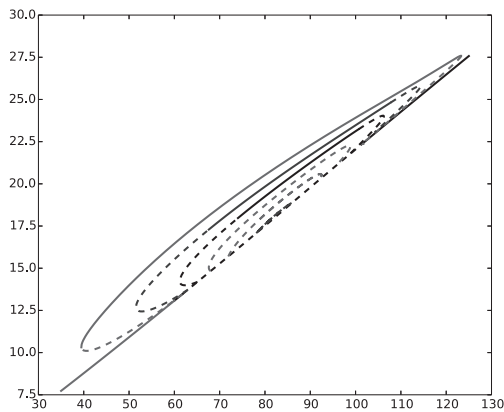


図 2: AUTO による (2) の分岐図.

次に AUTO によって Hopf 分岐点からの分岐解
を追跡し、(2) における大域的な分岐構造を調べた.
図中における直線は一樣流に相当し、曲線は渋滞相
に相当する時間周期解を表す. 線形安定性解析の結果
と同様に、 L の減少によって一樣流が不安定化する
ことが分かる. また、2 個の Hopf 分岐点に対して
1 つの曲線が対応している. 図では 12 個の Hopf 分
岐点が存在し、 $L = 80$ を挟んで計 6 個の曲線が描
かれている.

最後に (2) における基本図を調べる. 基本図とは
粒子密度と流量の関係を示すものであり、渋滞現象
においては低密度と高密度間のある臨界点において
不連続性をもつことが特徴である¹⁾. 実際、基本図 3
には不連続点が存在することが分かる. 図の作成に
おいては、ほぼ等間隔に配置した粒子 (uniform), z_0
と z_N の粒子間距離だけが大きく、その他の粒子感
距離は短い状態 (cluster) の 2 つを (2) の初期条件
として用い、それぞれに対する数値計算結果をまと

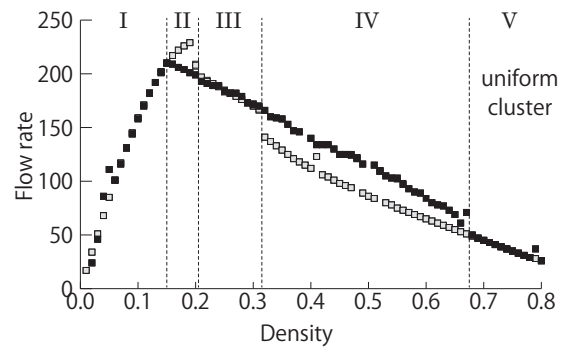


図 3: (2) における基本図.

めて掲載した.

3. 結論

本研究では (1) の縮約方程式である (2) に現れ
る渋滞流について考察した. (2) における分岐構造
を調べることで、粒子密度変化によって一樣流は確
かに Hopf 分岐し、渋滞流が発生することが分かつ
た. また、(2) に対して得られた基本図は先行研究
¹⁾ と定性的に同等の結果であるため、樟脳船と車の
集団運動に現れる渋滞現象は同等の性質を持つこと
が示唆される. さらに、実験⁷⁾ で得られた結果と定
性的に等しいため、(2) は実験結果を再現する縮約
方程式であると言える.

参考文献

- 1) M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics **11**, No.2, 203–223 (1994).
- 2) S.-I. Ei, J. Dynam. Differential Equations **14**, No.1, 85–137 (2002).
- 3) S.-I. Ei, M. Mimura and M. Nagayama, Physica D, **165**, No.3, 176–198 (2002).
- 4) M. Inaba, H. Yamanaka and S. Kondo, Science **335**, No.6069, 677 (2012).
- 5) M. Nagayama, S. Nakata, Y. Doi and Y. Hayashima, Physica D: Nonlinear Phenomena **194**, No.3-4, 151–165 (2004).
- 6) S. Nakata, Y. Iguchi, S. Ose, M. Kuboyama, T. Ishii and K. Yoshikawa, Langmuir, **13**, No.16, 4454–4458 (1997).
- 7) N. J. Suematsu, S. Nakata, A. Awazu and H. Nishimori, Physical Review E, **81**, No.5, 056210 (2010).